

Publications of the Centre for Nonlinear Analysis
and its Applications
5

Editorial Board:

Viorel Barbu, Doina Ciorănescu, Sorin Micu
Constantin P. Niculescu, Vicențiu Rădulescu
Mircea Sofonea, Marius Tucsnak

Publications of the Centre for Nonlinear Analysis and its Applications

1. Constantin P. Niculescu: *Mathematical Analysis. A Contemporary Approach*. 2nd Edition. (Romanian)
2. Constantin P. Niculescu: *Integral Calculus of Several Variables. Theory and Applications*. (Romanian)
3. Marian Gidea and Constantin P. Niculescu: *Chaotic Dynamical Systems. An Introduction*.
4. Constantin P. Niculescu and Lars-Erik Persson: *Convex Functions. Basic Theory and Applications*.
5. Sorin Daniel Micu: *Introduction to Finite Element Method*. (Romanian)

Introducere în metoda elementului finit

Sorin Daniel Micu

Universitatea din Craiova

Carte tipărită cu sprijinul grantului CNCSIS 80/2005.

Sorin Daniel Micu
Departamentul de Matematică
Facultatea de Matematică-Informatică
Universitatea din Craiova
RO 200585, Craiova, România
E-mail: sd_micu@yahoo.com

© 2005 Toate drepturile sunt rezervate autorului

Nici o parte a acestui volum nu poate fi copiată sau transmisă prin nici un mijloc, electronic sau mecanic, inclusiv fotocopiare, înregistrare audio, sau prin orice alt sistem de stocare și redare a informației, fără permisiunea scrisă din partea autorului.

Cuprins

Prefață	iii
1 Spații L^p	1
1.1 Definiții și proprietăți elementare	1
1.2 Spațiul Banach L^p și spațiul Hilbert L^2	6
1.3 Convoluții și teoreme de densitate	8
1.4 Exerciții	15
2 Spații Sobolev	17
2.1 Distribuții	17
2.2 Spațiul $H^1(\Omega)$	22
2.3 Spațiul $H_0^1(\Omega)$	25
2.4 Teoreme de urmă	27
2.4.1 Ω este un semi-spațiu	27
2.4.2 Ω este o mulțime deschisă regulată	30
2.5 Aplicații ale teoremei de urmă	33
2.6 Spațiul Sobolev $H^m(\Omega)$	36
2.7 O familie de inegalități	38
2.8 Exerciții	42
3 Probleme eliptice variaționale	43
3.1 Probleme variaționale abstracte	43
3.2 Problema Poisson	47
3.3 Sistemul Stokes	50
3.4 Sistemul elasticității	52
3.5 Ecuația plăcilor	55
3.6 Exerciții	57
4 Aproximarea problemelor variaționale	59
4.1 Descrierea metodei de aproximare	59
4.2 Două exemple de discretizări	64
4.3 Convergența metodei de aproximare	66
4.4 Metoda Galerkin	70
4.5 Discretizare prin metoda elementului finit	71

4.5.1	Construirea aproximațiilor	72
4.5.2	Convergența aproximațiilor	73
4.5.3	Fenomenul de superconvergență	78
4.6	Exerciții	80
5	Interpolare în $\mathbb{R}^N$	81
5.1	Elemente finite Lagrange	82
5.2	Simplexuri	85
5.3	Paralelotopuri	87
5.4	Eroarea în interpolare	89
5.5	Exerciții	96
6	Metoda elementului finit	97
6.1	Triangulații	98
6.2	Spațiile V_h în metoda elementului finit	100
6.3	Convergența metodei elementului finit	104
6.4	Domenii nepoligonale	109
6.5	Exerciții	115
7	Ecuatii în dimensiune unu	117
7.1	Ecuatie cu coeficienți constanți și condiții Dirichlet omogene	117
7.1.1	Elemente finite liniare	118
7.1.2	Elemente finite pătratice	127
7.1.3	Elemente finite cubice	136
7.1.4	Comparație a metodelor liniare, pătratice și cubice	141
7.2	Ecuatie cu coeficienți variabili și condiții la limită mixte	145
7.3	Ecuatie de ordin patru	150
8	Ecuatii în dimensiune doi	157
8.1	Ecuatie cu condiții Dirichlet omogene	157
8.1.1	Elemente finite simplexuri	158
8.1.2	Elemente finite paralelotopuri	167
8.2	Ecuatie cu condiții mixte Dirichlet-Neumann	175
9	Programarea metodei elementului finit	181
9.1	Definirea geometriei	182
9.2	Realizarea triangulației	182
9.3	Alegerea elementelor finite și numerotarea nodurilor	183
9.4	Construirea funcțiilor din bază	184
9.5	Construirea matricii de rigiditate	185
9.6	Determinarea termenului liber	187
9.7	Transformările elementelor de referință	187
9.8	Calculul integralelor	189
9.9	Exemplu	191
	Bibliografia	199

Prefață

Fenomene și procese reale dintre cele mai complexe au fost modelate matematic prin intermediul ecuațiilor cu derivate parțiale, care au devenit astfel un instrument de lucru foarte util, capabil să ofere date calitative și cantitative de mare utilitate despre fenomenul sau procesul modelat.

Studiul matematic abstract, folosind tehnici diverse provenite din analiza matematică, analiza funcțională, calculul variațional sau statistică, a condus la demonstrarea unor *proprietăți calitative*, care au permis înțelegerea mai profundă a problemei. Oricât de interesante și utile s-au dovedit aceste rezultate, ele nu au putut însă oferi decât în mică măsură acele *informații de ordin cantitativ*, absolut necesare pentru integrarea într-un ansamblu complex, realizarea de previziuni în ceea ce privește evoluția și îmbunătățirea performanțelor procesului sau fenomenului considerat. Această sarcină, extrem de importantă și complexă, a revenit metodelor numerice.

Diferite metode de aproximare ale problemelor continue au fost propuse atât de matematicieni cât și de ingineri, deși cu puncte de vedere de multe ori diferite. Astfel, în timp ce primii au dezvoltat tehnici generale aplicabile ecuațiilor diferențiale care descriu problema în ansamblul ei (diferențe finite, aproximări variaționale), cei din urmă au folosit o abordare mai intuitivă, divizând problema în mici părți sau “elemente” care se comportă într-un mod mai simplu. Acest mod de studiu a fost de o mare importanță atât conceptuală cât și computațională.

Cele mai vechi încercări de aproximare numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale au avut la bază un proces de discretizare care constă din înlocuirea derivatelor cu *diferențe finite*. Din punct de vedere matematic, lucrarea [9] a lui Courant, Friedrichs și Lewy din 1928 este primul dintre punctele de reper obligatorii ale acestei direcții de cercetare. Deși folosite și mai înainte, diferențele finite apar clar în această lucrare ca instrumente pentru obținerea unui șir convergent de aproximații ale soluțiilor unor probleme din fizica matematică.

Pe de altă parte, în contextul metodelor variaționale studiate la sfârșitul

secolului al XIX-lea și începutul secolului al XX-lea în lucrările lui Rayleigh sau Ritz (de exemplu, [21] și [22]) s-au propus procedee de aproximare bazate pe considerarea unor combinații liniare finite de funcții simple precum polinoame algebrice sau trigonometrice. Astfel, metoda discretizării derivatelor este înlocuită de un proces de discretizare a spațiului în care se caută soluția, care este ales de dimensiune finită și cât mai simplul posibil.

Este greu de determinat originile *metodei elementului finit* și momentul precis al inventării ei. În 1943 Courant [8] introduce pentru prima oară aproximări prin funcții continue, liniare pe porțiuni, asociate unei triangulații a domeniului. Este o idee care poate fi considerată ca precursora metodei elementului finit dar care nu a avut prea multe consecințe la momentul respectiv. De fapt, se recunoaște astăzi că folosirea, promovarea și perfecționarea metodei se datorează mai curând inginerilor decât matematicienilor. Astfel, lucrări de pionierat au fost realizate de Turner, Clough, Martin, Topp [26] și Argyris [2] în anii '50. Termenul de “element finit” apare pentru prima oară în lucrarea lui Clough [7] din 1960, care descrie o strategie de tratare a problemelor discrete bazată pe

- Divizarea problemei continue într-un număr finit de părți (elemente), al căror comportament este specificat de un număr finit de parametri.
- Obținerea unei aproximații pentru soluția problemei continue prin asamblarea tuturor elementelor anterioare.

Independent de realizările inginerilor, unele lucrări matematice de la mijlocul anilor '60 pornesc de la formularea variațională a unor probleme și studiază discretizarea acestora prin funcții liniare pe porțiuni. Deși inițial aceste metode sunt prezentate în cadrul metodei diferențelor finite, ele sunt de fapt cazuri speciale ale metodei elementului finit.

La sfârșitul anilor '60 și începutul anilor '70, aproximările prin funcții polinomiale pe porțiuni sunt analizate într-un număr mare de articole și încep să fie clădite bazele matematice ale metodei elementului finit. Progresele înregistrate au dus la o reconciliere și chiar o unificare a celor două puncte de vedere, ingineresc și matematic, adăugând ușurinței înțelegerii o generalitate care face metoda cu atât mai utilă.

Mijlocul anilor '70 cunoaște apariția unor lucrări de referință precum Strang și Fix [24], Ciarlet [6], Zienkiewicz [29], Brenner și Scott [3]. În continuare, metoda elementului finit va avea o dezvoltare spectaculoasă, impunându-se ca principala metodă de aproximare a soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale.

În prezent, literatura metodei elementului finit este enormă și sporește în fiecare lună cu zeci de noi aplicații și tehnici computaționale. Cititorul interesat de aprofundarea domeniului din punct de vedere matematic poate consulta [20], una dintre cărțile de referință ce a contribuit și la formarea autorului prezentei lucrări.

Cartea *Introducere în metoda elementului finit* își propune pe de o parte să prezinte fundamentele teoretice ale metodei elementului finit și pe de altă parte să ofere exemple concrete și tehnici specifice care să ajute la implementarea cu succes a ei.

Putem distinge trei părți principale ale lucrării care, deși strâns corelate, au obiective de sine stătătoare.

Prima parte cuprinde capitolele 1-3, în care se introduce aparatul matematic necesar formulării și rezolvării problemelor variaționale abstracte pe spații Hilbert. Capitolul 1 conține o succintă prezentare a spațiilor L^p și a principalelor proprietăți. În capitolul 2 se introduce noțiunea de distribuție și se prezintă spațiile Sobolev H^1 , H_0^1 și H^m . O atenție deosebită va fi acordată teoremelor de urmă și consecințelor acestora. Capitolul 3 este dedicat problemelor variaționale pe spații Hilbert. Se demonstrează teorema Lax-Milgram și sunt stabilite unele consecințe ale acesteia. Câteva probleme ale fizicii matematice sunt apoi formulate variațional și se demonstrează existența și unicitatea soluțiilor slabe: problema Poisson, sistemul elasticității, ecuația plăcilor, sistemul Stokes.

A doua parte a lucrării își propune să prezinte fundamentele metodei elementului finit și este formată din capitolele 4-6. În primul dintre ele este descris un procedeu general de aproximare a soluțiilor problemelor variaționale și se fac unele considerații asupra convergenței acestuia. Se stabilesc acum cerințele unei bune metode de aproximare și sunt oferite câteva posibilități simple de discretizare. În capitolul 5 se introduc elementele finite Lagrange și sunt oferite mai multe exemple și proprietăți importante ale lor. Acestea sunt folosite apoi la rezolvarea unei probleme de interpolarea în $\mathbb{R}^N$ și la studierea erorii corespunzătoare. Capitolul 6 descrie metoda elementului finit și condițiile care asigură convergența acesteia. Principalele estimări de eroare sunt date în ultima secțiune.

Ultima parte a lucrării este dedicată exemplelor și considerațiilor privind implementarea metodei. Exemple în dimensiune unu sunt oferite în capitolul 7 și în dimensiune doi în capitolul 8. Se urmărește prezentarea fiecărei etape a metodei, cu comentarii legate de realizarea lor practică și cu exemple numerice care să ilustreze acuratețea aproximațiilor. Extinderea acestor idei la cazul tridimensional este aproape imediată și cititorul o poate realiza urmărind aceeași succesiune de pași. Capitolul final prezintă câteva aspecte

ale programării metodei, urmărind realizarea algoritmică a fiecărei etape a procesului de aproximare.

Obiectul lucrării de față îl constituie aproximarea soluțiilor ecuațiilor de tip eliptic prin metoda elementului finit. Ecuațiile de evoluție folosesc, de asemenea, această metodă pentru discretizarea părții spațiale. În ceea ce privește partea temporală se preferă folosirea unor scheme cu diferențe finite. Toate aceste aspecte vor fi dezvoltate într-o viitoare lucrare ce se va ocupa de ecuațiile de tip parabolic și hiperbolic.

Cartea aceasta este rodul unei experiențe de peste zece ani în predarea cursului de metoda elementului finit la Facultatea de matematică-informatică și se dorește a fi un instrument util tuturor celor interesați de studiul și aplicarea metodei.

Autorul

Capitolul 1

Spații L^p

În acest capitol vom prezenta unele rezultate de teoria spațiilor L^p . Cum vom avea în vedere îndeosebi aplicațiile acestora la definirea spațiilor Sobolev și la studierea soluțiilor slabe ale ecuațiilor eliptice, nu vom da decât acele proprietăți direct legate de obiectivele noastre. Astfel, acest capitol nu se vrea o prezentare exhaustivă a spațiilor L^p ci își propune doar să treacă în revistă câteva proprietăți și tehnici utile. Unele demonstrații vor fi doar schițate iar altele vor lipsi complet. Din contră, acele demonstrații care au relevanță pentru studiul nostru prin prisma tehnicii folosite, vor fi prezentate în detaliu.

Vom presupune cunoscute noțiunile de măsură Lebesgue precum și de funcție măsurabilă și integrabilă Lebesgue. Dacă A este o mulțime măsurabilă Lebesgue, vom nota prin $|A|$ măsura sa. Pe parcursul întregului capitol, N va fi un număr natural nenul iar Ω o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^N$. Dacă o proprietate va avea loc pentru orice $x \in \Omega$ cu excepția unei mulțimi de măsură nulă vom spune că ea are loc a.p.t. în Ω .

1.1 Definiții și proprietăți elementare

Definiția 1.1.1 Pentru $1 \leq p < \infty$, definim spațiul

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ măsurabilă și } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\}$$

și, pentru orice $f \in L^p(\Omega)$, notăm

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definiția 1.1.2 *Definim spațiul*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ măsurabilă, } \exists C > 0 \text{ cu } |f(x)| \leq C \text{ a.p.t. în } \Omega\}$$

și, pentru orice $f \in L^\infty(\Omega)$, notăm

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ a.p.t. în } \Omega\}.$$

Dacă $1 \leq p \leq \infty$, introducem numărul $p' \in [1, \infty]$, numit **exponentul conjugat al lui p** , definit prin

$$(1.1) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Următorul rezultat oferă o extrem de importantă inegalitate și o relație între spațiile L^p .

Teorema 1.1.1 (*Inegalitatea Hölder*) Fie $f \in L^p(\Omega)$ și $g \in L^{p'}(\Omega)$. Atunci $fg \in L^1(\Omega)$ și

$$(1.2) \quad \int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstrație: Dacă $p = 1$ sau $p = \infty$ concluzia se obține imediat. De asemenea, (1.2) este evidentă dacă $f = 0$ sau $g = 0$ a.p.t. în Ω .

Fie acum $1 < p < \infty$, $f \neq 0$ și $g \neq 0$ a.p.t. în Ω . Dacă a și b sunt două numere reale nenegative următoarea inegalitate are loc

$$(1.3) \quad ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Intr-adevăr, cum funcția logaritmică este concavă în $(0, \infty)$ obținem că

$$\ln \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{p'} \ln(b^{p'}) = \ln(ab)$$

de unde rezultă imediat că (1.3) este adevărată pentru orice $a, b > 0$. Cazurile $a = 0$ sau $b = 0$ sunt triviale.

Acum, din (1.3) obținem că a.p.t. în Ω ,

$$|f(x)| |g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{p'} |g(x)|^{p'}.$$

Prin urmare, în condițiile teoremei, $fg \in L^1(\Omega)$ și

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'} \|g\|_{L^{p'}}^{p'}.$$

Pentru orice $\lambda > 0$, considerând λf în loc de f în ultima inegalitate, obținem că

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda^{p'}} \|g\|_{L^{p'}}^{p'}.$$

Inegalitatea (1.2) rezultă alegând $\lambda = (\|f\|_{L^p})^{-1} \|g\|_{L^{p'}}^{\frac{p'}{p}}$. ■

Următoarele rezultate de trecere la limită sub semnul integralei sunt foarte utile. Le menționăm fără demonstrații care se pot găsi, de exemplu, în [27].

Teorema 1.1.2 (*Beppo Levi*) Fie $(f_n)_{n \geq 1}$ un șir crescător de funcții din $L^1(\Omega)$ astfel încât

$$\sup_n \int_{\Omega} f_n(x) dx < \infty.$$

Pentru aproape orice $x \in \Omega$ șirul $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge la o limită finită $f(x)$. În plus, $f \in L^1(\Omega)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$.

Datorită condiției de șir crescător, teorema 1.1.2 se mai numește și teorema convergenței monotone.

Teorema 1.1.3 (*Lebesgue*) Fie $(f_n)_{n \geq 1}$ un șir de funcții din $L^1(\Omega)$ astfel încât

1. $f_n(x)$ converge la $f(x)$ pentru aproape orice $x \in \Omega$.
2. Există $g \in L^1(\Omega)$ astfel încât, pentru orice n ,

$$(1.4) \quad |f_n(x)| \leq g(x) \text{ a.p.t. în } \Omega.$$

Atunci $f \in L^1(\Omega)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$.

Datorită condiției (1.4), teorema 1.1.3 se mai numește și teorema convergenței dominate a lui Lebesgue.

Observația 1.1.1 Nu vom da o demonstrație a teoremei lui Lebesgue dar, dată fiind deosebita ei importanță și utilitate, vom face câteva remarci la adresa ei.

1. Deși prima cerință din ipoteza teoremei 1.1.3 este una logică, cea de a doua poate părea, la prima vedere, mai ciudată. Oricum ea este o condiție necesară după cum se poate vedea din exemplul următor:

$$f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x| & \text{dacă } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Evident, $(f_n)_{n \geq 1}$ tinde punctual la $f = 0$ când n tinde la infinit. Cu toate acestea,

$$\int_{-1}^1 |f_n(x)| dx = 1, \quad \forall n \geq 1$$

și prin urmare $(f_n)_{n \geq 1}$ nu tinde la f în $L^1(-1, 1)$. Să remarcăm că, în acest exemplu, șirul $(f_n)_{n \geq 1}$ nu este mărginit superior de nici o funcție din $L^1(-1, 1)$, deci cea de a doua cerință din teorema 1.1.3 nu este îndeplinită.

2. Teorema 1.1.3 rămâne adevărată dacă în enunț spațiul L^1 se înlocuiește cu L^p , $p \in (1, \infty)$. Într-adevăr, cum $|f_n|^p$ tinde a.p.t. la $|f|^p$ atunci $|f|^p$ este măsurabilă și cum în plus,

$$|f_n(x)|^p \leq g^p(x) \text{ a.p.t. în } \Omega$$

rezultă că $f \in L^p(\Omega)$.

Pe de altă parte, cum $(f_n - f)_{n \geq 1}$ tinde la zero a.p.t. în Ω și

$$|(f_n - f)(x)|^p \leq [g(x) + |f(x)|]^p,$$

rezultă din teorema 1.1.3 că

$$\int_{\Omega} |(f_n - f)(x)|^p dx \rightarrow 0$$

și proprietatea este demonstrată. $\square$

Teorema 1.1.4 (Fatou) Fie $(f_n)_{n \geq 1}$ un șir de funcții din $L^1(\Omega)$ astfel încât

$$1. \sup_n \int_{\Omega} f_n(x) dx < \infty.$$

2. Pentru orice n , $f_n(x) \geq 0$ a.p.t. în Ω .

Pentru orice $x \in \Omega$ fie $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Atunci $f \in L^1(\Omega)$ și

$$\int_{\Omega} f dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx.$$

Prezentăm în continuare două teoreme importante prin legăturile pe care le fac între funcțiile măsurabile și funcțiile continue pe de o parte și între convergența punctuală și cea uniformă pe de altă parte.

Teorema 1.1.5 (Luzin) Fie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe mulțimea măsurabilă Ω . Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f măsurabilă
2. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime închisă $F \subset \Omega$ astfel încât $|\Omega \setminus F| < \varepsilon$ și $f|_F$ este continuă.

Teorema 1.1.6 (Egorov) Fie $(f_n)_{n \geq 1}$ un șir de funcții definite pe mulțimea măsurabilă Ω cu $|\Omega| < \infty$. Dacă $(f_n)_{n \geq 1}$ converge punctual a.p.t. în Ω atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime măsurabilă $E \subset \Omega$ astfel încât $|\Omega \setminus E| < \varepsilon$ și $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform în E .

Următoarele două teoreme sunt foarte folositoare când integrăm pe un spațiu produs. Fie două mulțimi deschise $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ și $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă.

Teorema 1.1.7 (Tonelli) Presupunem că

1. $\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$ a.p.t. în Ω_1 ,
2. $\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$.

Atunci $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema 1.1.8 (Fubini) Fie $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Atunci, pentru aproape orice $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1(\Omega_2) \quad \text{și} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1(\Omega_1).$$

La fel, pentru aproape orice $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1(\Omega_1) \quad \text{și} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1(\Omega_2).$$

În plus avem că

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} |F(x, y)| dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |F(x, y)| dx dy.$$

1.2 Spațiul Banach L^p și spațiul Hilbert L^2

Proprietatea următoare este una dintre cele mai importante ale spațiilor L^p .

Teorema 1.2.1 $L^p(\Omega)$ este un spațiu Banach pentru orice $p \in [1, \infty]$.

Demonstrație: Vom considera mai întâi cazul $p \in [1, \infty)$. Arătăm că $L^p(\Omega)$ este un spațiu vectorial și $\|\cdot\|_{L^p}$ este o normă vectorială. Dacă f și g aparțin lui $L^p(\Omega)$ avem că

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Astfel, $f + g \in L^p(\Omega)$. Mai mult, cum $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$, obținem că

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| + \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |g| \leq \\ &\leq \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \|g\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

și se deduce imediat că $\|\cdot\|_{L^p}$ este o normă.

Pentru a arăta că $L^p(\Omega)$ este un spațiu Banach, considerăm un șir Cauchy $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^p(\Omega)$ și demonstrăm că este convergent la o funcție $f \in L^p(\Omega)$.

Există un subșir $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ astfel încât

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Fie $g_m(x) = \sum_{k=1}^m |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$. Rezultă că

$$\|g_m\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^m \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Din teorema de convergență monotonă 1.1.2, șirul $(g_m)_{m \geq 1}$ converge a.p.t. în Ω la o funcție $g \in L^p(\Omega)$. Cum

$$|f_{n_{k+p+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |f_{n_{k+p+1}}(x) - f_{n_{k+p}}(x)| + |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_{k+p-1}}(x)| + \dots + |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \\ &\leq g_{k+p}(x) - g_{k-1}(x) \end{aligned}$$

rezultă că $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge a.p.t. în Ω la o funcție f .

În plus, din

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) - g_{k-1}(x) \leq g(x)$$

deducem că $f \in L^p(\Omega)$.

Din teorema convergenței dominate 1.1.3 rezultă că $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge în $L^p(\Omega)$ la f și prin urmare $(f_n)_{n \geq 1}$ converge la f în $L^p(\Omega)$.

Să studiem acum cazul $p = \infty$. Este ușor de văzut că $\|\cdot\|_{L^\infty}$ este o normă. Pentru a arăta că $L^\infty(\Omega)$ este un spațiu Banach, considerăm un șir Cauchy $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^\infty(\Omega)$ și demonstrăm că este convergent la o funcție $f \in L^\infty(\Omega)$.

Pentru orice $k > 0$, există $n_k \geq 1$ cu proprietatea că

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \frac{1}{k}, \quad \forall n, m \geq n_k.$$

Urmează că există o mulțime E_k de măsură zero astfel încât

$$(1.5) \quad |(f_n - f_m)(x)| < \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad \forall n, m \geq n_k.$$

Pentru orice $x \in E = \cup_{k \geq 1} E_k$, se obține că $(f_n(x))_{n \geq 1}$ este un șir Cauchy și converge la $f(x)$. Făcând m să tindă la infinit în (1.5) rezultă că

$$(1.6) \quad |(f_n - f)(x)| < \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega \setminus E, \quad \forall n \geq n_k.$$

Cum E este de măsură zero, se obține că $f \in L^\infty(\Omega)$ și $(f_n)_{n \geq 1}$ converge la f în $L^\infty(\Omega)$. Demonstrația teoremei este acum completă. ■

Observația 1.2.1 Din demonstrația teoremei 1.2.1 se obține că orice șir convergent în $L^p(\Omega)$ are un subșir convergent a.p.t. în Ω . □

Spațiul $L^2(\Omega)$ este cu totul special deoarece poate fi dotat cu un produs scalar. Într-adevăr, dacă $f, g \in L^2(\Omega)$ se definește

$$(1.7) \quad (f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

și se obține imediat că

Teorema 1.2.2 (1.7) este un produs scalar în raport cu care $L^2(\Omega)$ este un spațiu Hilbert.

În cele ce urmează vom folosi notația $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)} = \| \cdot \|_{0,\Omega}$. Al doilea indice, Ω , arată domeniul de integrare și poate fi omis dacă acest lucru este clar din context.

1.3 Convoluții și teoreme de densitate

Între aplicațiile utile ale spațiilor L^p se numără și produsul de convoluție care va fi introdus în următoarea teoremă.

Teorema 1.3.1 Fie $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ și $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ cu $1 \leq p \leq \infty$. Atunci, pentru aproape orice $x \in \mathbb{R}^N$, funcția $y \rightarrow f(x-y)g(y)$ este integrabilă în $\mathbb{R}^N$. Dacă definim

$$(1.8) \quad (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

atunci $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ și $\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Demonstrație: Dacă $p = \infty$ rezultatul este evident. Considerăm următoarele două cazuri posibile:

1. Cazul $p = 1$. Fie $F(x, y) = f(x-y)g(y)$. Pentru aproape orice $y \in \mathbb{R}^N$ avem că

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dx = |g(y)| \|f\|_{L^1} < \infty$$

și

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)|dx = \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|dx = \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1}.$$

Teorema lui Tonelli implică $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. În plus, din teorema lui Fubini,

$$\|F\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)|dx = \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1}.$$

2. Cazul $1 < p < \infty$. Cum $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, rezultă că $|g|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ca în cazul precedent se obține că, pentru aproape orice $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Cum $|f(x-y)|^{1/p'} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ deducem cu ajutorul inegalității Hölder că

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{1/p} |g(y)| |f(x-y)|^{1/p'} dy \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right)^{1/p} \|f\|_{L^1}^{1/p'}. \end{aligned}$$

Astfel,

$$|(f \star g)(x)|^p \leq (|f| \star |g|^p)(x) \|f\|_{L^1}^{p/p'}.$$

și rezultatul se obține din primul caz. ■

Vom defini acum suportul unei funcții. Vom considera mai întâi cazul unei funcții continue.

Definiția 1.3.1 *Suportul unei funcții reale și continue φ definită în Ω este mulțimea*

$$(1.9) \quad \text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Astfel, suportul unei funcții continue este aderența mulțimii pe care funcția nu se anulează. Este ușor de văzut că

Propoziția 1.3.1 *Un punct $x \in \Omega$ nu aparține lui $\text{supp}(\varphi)$ dacă și numai dacă există un deschis $\omega \subset \Omega$ cu proprietatea că $x \in \omega$ și $f|_{\omega} = 0$.*

La extinderea noțiunii de suport pentru funcții măsurabile dorim păstrarea proprietății 1.3.1. Acest lucru face ca definiția să nu mai fie (1.9), lucru care se poate vedea imediat considerând funcția $1_{\mathbb{Q}}$.

Definiția 1.3.2 *Fie φ o funcție reală definită și măsurabilă în Ω . Suportul lui φ este mulțimea*

$$(1.10) \quad \text{supp}(\varphi) = \Omega \setminus \bigcup \{ \omega \subset \Omega : \omega \text{ mulțime deschisă cu } \varphi = 0 \text{ a.p.t. } \omega \}.$$

Conform proprietății 1.3.1, definițiile 1.3.2 și 1.3.1 coincid în cazul funcțiilor continue. Proprietatea care urmează oferă informații asupra suportului unei convoluții dacă sunt cunoscute suporturile funcțiilor ce o definesc.

Propoziția 1.3.2 Dacă $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ și $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ atunci

$$(1.11) \quad \text{supp}(f \star g) \subseteq \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}.$$

Demonstrație: Să remarcăm mai întâi relația

$$(f \star g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int_{(x-\text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g)} f(x-y)g(y)dy.$$

Să notăm $A = \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$ și fie $x \notin A$. Vom demonstra că $x \notin \text{supp}(f \star g)$. Cum $\mathbb{R}^N \setminus A$ este deschisă, există o mulțime deschisă ω astfel încât $x \in \omega$ și $\omega \subset \mathbb{R}^N \setminus A$. Pentru aproape orice $t \in \omega$ avem că $(t - \text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$ și prin urmare $(f \star g)(t) = 0$ a.p.t. în ω . Rezultă că $x \notin \text{supp}(f \star g)$ și demonstrația se încheie. ■

Definim următoarele spații

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f1_K \in L^p(\Omega) \text{ pentru orice } K \subset \Omega, \text{ compactă}\}$$

unde prin 1_K notăm funcția caracteristică a mulțimii K . Observați că orice funcție din $L^p(\Omega)$ este în $L^p_{loc}(\Omega)$.

Dacă notăm

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continuă și de suport compact inclus în } \Omega\}$$

definim, pentru orice $1 \leq k < \infty$, spațiul

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega).$$

De asemenea, definim

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Aceste spații vor juca un rol deosebit la definirea distribuțiilor în Ω .

Propoziția 1.3.3 Dacă $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ și $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ atunci $f \star g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstrație: În primul rând să notăm că, deoarece f are suport compact, $(f \star g)(x)$ este bine definită pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$. Fie acum $x \in \mathbb{R}^N$ și $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir care tinde la x . Dacă $F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$ și $F(y) = f(x - y)g(y)$ obținem că $F_n \rightarrow F$ a.p.t. în $\mathbb{R}^N$. În plus, cum $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, se obține că există un compact K astfel încât $\text{supp}(F_n) \subset K$ și

$$|F_n(y)| \leq \|f\|_{L^\infty} 1_K(y) |g(y)|.$$

Din teorema lui Lebesgue obținem că

$$(f \star g)(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F_n(y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} F(y) dy = (f \star g)(x)$$

și demonstrația se încheie. ■

Propoziția 1.3.4 Dacă $k \geq 1$, $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^N)$ și $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, atunci $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$ și

$$(1.12) \quad D^k(f \star g) = (D^k f) \star g.$$

Demonstrație: Este suficient să demonstrăm proprietatea în cazul $k = 1$ pentru că rezultatul general se va obține prin recurență.

Dat $x \in \mathbb{R}^N$ demonstrăm că $f \star g$ este diferențiabilă în x și

$$(1.13) \quad \nabla(f \star g)(x) = (\nabla f \star g)(x).$$

Fie $h \in \mathbb{R}^N$ cu $|h| < 1$. Pentru orice $y \in \mathbb{R}^N$, cum ∇f este uniform continuă în $\mathbb{R}^N$, avem că

$$\begin{aligned} & |f(x+h-y) - f(x-y) - h \nabla f(x-y)| = \\ & = \left| \int_0^1 [h \nabla f(x+sh-y) - h \nabla f(x-y)] ds \right| \leq |h| o(|h|), \end{aligned}$$

unde $o(h)$ este o funcție care tinde la zero când $h \rightarrow 0$.

Fie K o mulțime compactă astfel încât $x + B(0, 1) \setminus \text{supp}(f) \subset K$.

Rezultă că

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h \nabla f(x-y)| \leq |h| o(|h|) 1_K(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \forall h \in B(0, 1).$$

Prin urmare

$$|(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x) - h(\nabla f \star g)(x)| \leq |h| o(|h|) \int_K |g(y)| dy, \quad \forall h \in B(0, 1).$$

Trecând la limită, obținem că $f \star g$ este diferențiabilă în x și are loc (1.13). ■

Următoarea proprietate a funcțiilor din $L^p(\mathbb{R}^N)$ va fi utilă în demonstrația unor rezultate de densitate.

Lema 1.3.1 Fie $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Atunci

$$(1.14) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

Demonstrație: Definim mulțimile

$$C_p = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^N) : \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \text{ când } h \rightarrow 0 \right\},$$

$$S = \left\{ g = \sum_{i=1}^k c_i 1_{A_i} : c_i \in \mathbb{R}, A_i \text{ este un cub din } \mathbb{R}^N \right\}.$$

S este densă în $L^p(\Omega)$ și inclusă în C_p .

Se poate vedea imediat că C_p este un subspațiu al lui $L^p(\mathbb{R}^N)$. Mai mult, C_p este un subspațiu închis al lui $L^p(\mathbb{R}^N)$. Într-adevăr, dacă $(f_k)_{k \geq 1} \subset C_p$ converge la f în $L^p(\mathbb{R}^N)$, atunci

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^p} &\leq \\ &\leq \|f(x+h) - f_k(x+h)\|_{L^p} + \|f_k(x+h) - f_k(x)\|_{L^p} + \|f_k(x) - f(x)\|_{L^p} = \\ &= 2\|f_k(x) - f(x)\|_{L^p} + \|f_k(x+h) - f_k(x)\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Prin trecere la limită când $k \rightarrow \infty$ obținem că $f \in C_p$ și prin urmare

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\|f_k(x) - f(x)\|_{L^p}.$$

Cum $S \subset C_p$ iar C_p este un subspațiu închis al lui L^p , rezultă că $C_p = L^p(\mathbb{R}^N)$ și demonstrația este încheiată. ■

Fie acum $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți

1. $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$
2. $0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$
3. $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1$
4. $\rho(x) = 0, \quad \forall |x| > 1.$

Definim șirul *regularizant* $(\rho_k)_{k \geq 1}$, prin

$$(1.15) \quad \rho_k = k^N \rho(kx).$$

Să punem în evidență utilitatea șirului regularizant definit mai sus. Astfel, dacă $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, definim

$$(1.16) \quad f_k = f \star \rho_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Șirul $(f_k)_{k \geq 1}$ dat de (1.16) (numit în literatură “*mollifiers*”) are o serie de proprietăți foarte utile. În primul rând, din propoziția 1.3.4, obținem că

$$f_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N).$$

La fel de importante sunt însă proprietățile de convergență.

Propoziția 1.3.5 *Dacă $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, atunci șirul $(f_k)_{k \geq 1}$ converge uniform la f pe orice compact din $\mathbb{R}^N$.*

Demonstrație: Fie $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact. Cum funcția f este uniform continuă pe K , dat $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B_{\mathbb{R}^N}(0, \delta).$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} (f \star \rho_k)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} (f(x - y) - f(x)) \rho_k(y) dy = \\ &= \int_{B_{\mathbb{R}^N}(0, 1/k)} (f(x - y) - f(x)) \rho_k(y) dy. \end{aligned}$$

Pentru $k > \frac{1}{\delta}$ avem că pentru orice $x \in K$,

$$|(f \star \rho_k)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(y) dy = \varepsilon$$

și demonstrația se încheie. ■

În plus, avem că

Teorema 1.3.2 *Dacă $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, atunci șirul $(f_k)_{k \geq 1}$ converge la f în $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstrație: Avem că

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) \rho_k(y) dy - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \rho(y) dy \right|^p \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| f\left(x - \frac{1}{k}y\right) - f(x) \right| \rho(y) dy \right)^p \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| f\left(x - \frac{1}{k}y\right) - f(x) \right|^p \rho(y) dy \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho(y) dy \right)^{\frac{p}{p'}} = \end{aligned}$$

$$\leq \int_{|y| \leq 1} \left| f(x - \frac{1}{k}y) - f(x) \right|^p \rho(y) dy.$$

Din teorema Fubini-Tonelli obținem că

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |f_k(x) - f(x)|^p dx \leq \\ & \leq \int_{|y| \leq 1} dy \int_{\mathbb{R}^N} \left| f(x - \frac{1}{k}y) - f(x) \right|^p dx \leq \\ & \leq \sup_{h \leq \frac{1}{k}} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - h) - f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Urmează din lema 1.3.1 că $f_k \rightarrow f$ în $L^p(\mathbb{R}^N)$ când k tinde la infinit. ■

Următoarea teoremă arată că orice funcție din $L^p(\Omega)$ se poate aproxima prin funcții din $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.3.3 *Spațiul $\mathcal{D}(\Omega)$ este dens în $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

Demonstrație: Fie $f \in L^p(\Omega)$ și $\varepsilon > 0$. Vom demonstra în trei etape că există $\hat{f} \in \mathcal{D}(\Omega)$ astfel încât

$$(1.17) \quad \|f - \hat{f}\|_{L^p} < \varepsilon.$$

1. Demonstrăm că f se poate aproxima prin funcții din $L^p(\mathbb{R}^N)$ de suport compact în $\mathbb{R}^N$: există $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ astfel încât $M = \text{supp}(g) \subseteq \bar{\Omega}$ este compact în $\mathbb{R}^N$ și

$$(1.18) \quad \|f - g\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pentru aceasta definim, pentru fiecare $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in \Omega \cap B_{\mathbb{R}^N}(0, n) \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Folosind teorema lui Lebesgue, se arată imediat că șirul $(f_n)_{n \geq 1}$ tinde la f în $L^p(\Omega)$. Vom alege $g = f_n$ pentru n suficient de mare.

2. Demonstrăm că g se poate aproxima prin funcții din $L^p(\Omega)$ de suport compact în Ω : există $h \in L^p(\Omega)$ astfel încât $K = \text{supp}(h) \subset \Omega$ este un compact și

$$(1.19) \quad \|g - h\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pentru fiecare $n \geq 0$, fie $F_n \subset \Omega$ o mulțime închisă cu proprietatea că $|\Omega \setminus F_n| < \frac{1}{n}$ și $K_n = M \cap F_n$. Evident K_n este un compact inclus în Ω și definim $h_n = g1_{K_n}$. Avem că

$$\int_{\Omega} |g - h_n|^p dx = \int_{M \setminus K_n} |g|^p dx \leq \int_{\Omega \setminus F_n} |g|^p dx.$$

Cum $|\Omega \setminus F_n| < \frac{1}{n}$, rezultă că, pentru n suficient de mare,

$$\int_{\Omega \setminus F_n} |g|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

și prin urmare, putem lua $h = h_n$ în (1.19).

3. Vom demonstra că h se poate aproxima prin funcții din $\mathcal{D}(\Omega)$: există $\hat{f} \in \mathcal{D}(\Omega)$ astfel încât

$$(1.20) \quad \|h - \hat{f}\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Acest lucru este o consecință imediată a teoremei 1.3.2 deoarece șirul obținut prin convoluția lui h (care este o funcție cu suport compact în Ω) cu un șir regularizant aparține lui $\mathcal{D}(\Omega)$.

Demonstrația teoremei se încheie observând că (1.18), (1.19) și (1.20) implică (1.17). ■

1.4 Exerciții

1. Demonstrați că dacă f este măsurabilă în X atunci f este integrabilă în X dacă și numai dacă $|f|$ este integrabilă în X .
2. Dacă $(f_n)_{n \geq 1}$ este un șir de funcții măsurabile în X care converge la f a.p.t. în X , atunci f este măsurabilă.
3. Arătați că dacă Ω este un deschis de măsură finită, atunci $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pentru orice $1 \leq q \leq p \leq \infty$.
4. Dat $p \in [1, \infty)$, arătați că
 - (a) $x^\alpha \in L^p(0, 1)$ dacă și numai dacă $\alpha > -\frac{1}{p}$.
 - (b) $x^\alpha \in L^p(1, \infty)$ dacă și numai dacă $\alpha < -\frac{1}{p}$.

(c) $\ln(x) \in L^p(0, 1)$ și $\ln(x) \notin L^\infty(0, 1)$.

5. Demonstrați lema 1.3.1 folosind teorema lui Lusin.

6. Demonstrați că $\mathcal{D}(\Omega)$ este dens în $L^1_{loc}(\Omega)$.

7. Demonstrați că dacă $u \in L^1(a, b)$ atunci funcția U definită prin

$$U(x) = \int_a^x u(s) ds$$

are următoarele proprietăți

(a) $U \in \mathcal{C}[a, b]$

(b) U este derivabilă a.p.t. în $[a, b]$ și $\frac{dU}{dx}(x) = u(x)$ a.p.t. în $[a, b]$.

8. Dacă f și g sunt două funcții nenegative, măsurabile în $\mathbb{R}^N$, atunci

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \star g dx = \left(\int_{\mathbb{R}^N} f dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g dx \right).$$

9. Demonstrați că egalitatea în inegalitatea Hölder are loc dacă și numai dacă fg are semn constant a.p.t. în Ω și $|f|^p$ este multiplu de $|g|^{p'}$ a.p.t. în Ω .

10. (Generalizarea inegalității Hölder) Dacă $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$, cu $1 \leq p_i, r$, atunci

$$\|f_1 \cdot \dots \cdot f_k\|_{L^r} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

11. Dacă $(f_k)_{k \geq 1}$ converge la f în $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $(g_k)_{k \geq 1}$ converge la g a.p.t. în Ω și $\|g_k\|_{L^p} \leq M$ pentru orice $k \geq 1$, atunci $(f_k g_k)_{k \geq 1}$ converge la fg în $L^p(\Omega)$.

12. Fie $1 \leq p < \infty$. Dacă $(f_k)_{k \geq 1} \subset L^p(\Omega)$ converge la $f \in L^p(\Omega)$ a.p.t. în Ω și este uniform mărginit în $L^p(\Omega)$ atunci, pentru orice $g \in L^{p'}(\Omega)$, $(f_k g)_{k \geq 1}$ converge la fg în $L^1(\Omega)$.

13. Fie $1 \leq p \leq \infty$. Dacă $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ și $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, atunci $f \star g$ este mărginită și continuă în $\mathbb{R}^N$.

14. Dacă $f_n = f \star \rho_n$ unde $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ iar $(\rho_n)_n$ este șir regularizant (1.15), atunci $f_n(x)$ converge la $f(x)$ în fiecare punct x de continuitate al lui f .

Capitolul 2

Spații Sobolev

În acest capitol vom defini spațiile Sobolev și vom studia unele proprietăți ale lor. Aceste spații s-au dovedit a fi instrumente de lucru extrem de utile în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale și s-au impus treptat în literatura de specialitate a ultimilor cincizeci de ani. Potrivit interesului nostru, numai spațiile Hilbert vor fi considerate. Vom introduce mai întâi noțiunile de distribuție și derivată distribuțională, iar apoi vom trece la studiul efectiv al spațiilor Sobolev.

2.1 Distribuții

Fie Ω o mulțime deschisă nevidă din $\mathbb{R}^N$. Reamintim că suportul unei funcții reale și continue φ definită în Ω este mulțimea

$$(2.1) \quad \text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Spațiul $\mathcal{D}(\Omega)$ introdus în capitolul precedent va mai fi numit și **spațiul funcțiilor test în Ω** . Dacă $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ și $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ vom nota

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$$

și

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}.$$

Să remarcăm că $\mathcal{D}(\Omega)$ este o mulțime nevidă. Într-adevăr, dacă $a \in \Omega$ și $r > 0$ este astfel încât $B_{\mathbb{R}^N}(a, r) \subset \Omega$, definim funcția

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x-a|^2 - r^2}}, & \text{pentru } |x-a| < r \\ 0, & \text{pentru } |x-a| \geq r. \end{cases}$$

Se poate vedea imediat că $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ și prin urmare $\mathcal{D}(\Omega)$ este nevidă. Oricum, vorbind *grosso modo*, spațiul $\mathcal{D}(\Omega)$ nu are foarte multe elemente. Prin urmare, dualul său va fi foarte bogat. După cum vom vedea în continuare, acesta va include nu doar funcțiile obișnuite (de exemplu din $L^1_{loc}(\Omega)$) ci și elemente precum δ lui Dirac, derivate de funcții din $L^1_{loc}(\Omega)$ și multe altele.

Definim acum o distribuție în Ω .

Definiția 2.1.1 O aplicație $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ este o **distribuție în Ω** dacă

1. T este liniară

$$T(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2) = r_1T(\varphi_1) + r_2T(\varphi_2), \quad \forall r_i \in \mathbb{R}, \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = 1, 2.$$

2. T este continuă în sensul că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$$

pentru orice șir $(\varphi_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ și $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ astfel încât

i) Există un compact $K \subset \Omega$ astfel încât $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ pentru orice $n \geq 1$.

ii) Șirul $(D^\alpha \varphi_n)_{n \geq 1}$ converge uniform la $D^\alpha \varphi$ în K pentru orice $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Definiția 2.1.2 Spațiul distribuțiilor în Ω este un spațiu vectorial

$$(2.2) \quad \mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : T \text{ distribuție în } \Omega\}.$$

Dacă $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ și $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, vom nota

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle.$$

Două distribuții T_1 și T_2 din $\mathcal{D}'(\Omega)$ sunt egale (vom scrie $T_1 = T_2$) dacă și numai dacă

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Iată câteva exemple de distribuții în Ω .

1. Fie $f \in L^2(\Omega)$. Definim aplicația $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(2.3) \quad T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Este ușor de văzut că T_f definește o distribuție în Ω . În plus, cum $\mathcal{D}(\Omega)$ este dens în $L^2(\Omega)$, dacă $T_f = T_g$ cu $f, g \in L^2(\Omega)$ atunci $f = g$. Astfel, spațiul $L^2(\Omega)$ poate fi identificat cu un subspațiu de distribuții în Ω . În acest sens, vom scrie

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

și vom zice că $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ este în $L^2(\Omega)$ dacă și numai dacă există $f \in L^2(\Omega)$ astfel încât $T = T_f$ și (2.3) este verificată. În cele ce urmează vom identifica sistematic T_f cu f .

2. Se poate face același lucru ca mai sus pentru funcții $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.
3. Pentru $a \in \Omega$ definim aplicația $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(2.4) \quad \delta_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Este ușor de văzut că δ_a definește o distribuție în Ω , numită distribuția Dirac în punctul a . Prin acest exemplu vedem că noțiunea de distribuție generalizează noțiunea de funcție. Uneori, distribuțiile mai sunt numite și funcții generalizate.

Să introducem acum conceptul de derivată a unei distribuții.

Dacă $\alpha \in \mathbb{N}^N$ și $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definim $D^\alpha T$ prin

$$(2.5) \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se poate vedea imediat că $D^\alpha T$ este o distribuție în Ω .

Definiția 2.1.3 Dacă $\alpha \in \mathbb{N}^N$ și $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, distribuția $D^\alpha T$ dată de (2.5) este numită **derivata de ordin α în sensul distribuțiilor a lui T** .

Astfel, o distribuție are derivată în sensul distribuțiilor de orice ordin care este tot o distribuție. Să dăm câteva exemple de derivate de distribuții.

1. Fie Ω deschis mărginit și $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Prin urmare $f \in L^2(\Omega)$ și există o unică distribuție $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ astfel încât

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dacă $1 \leq i \leq N$, să calculăm derivata lui T_f în raport cu x_i . Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_f, \varphi \right\rangle = - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi = \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle$$

unde am ținut cont că $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Prin urmare, se obține că

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}.$$

Folosind identificare lui T_f cu f și a lui $T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$ cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, obținem că derivata în sensul distribuțiilor coincide cu derivata uzuală când aceasta poate fi calculată.

2. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ și să calculăm derivata ei în sensul distribuțiilor.

În primul rând să remarcăm că $f \in \mathcal{C}[-1, 1] \subset L^2(-1, 1)$ și putem defini T_f ca în (2.3). Dacă $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ obținem

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{-1}^1 f(x) \varphi'(x) dx = \\ &= \int_{-1}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^1 x \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \int_0^1 \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 H(x) \varphi(x) dx = \langle T_H, \varphi \rangle \end{aligned}$$

unde H este definit astfel

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{dacă } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Deci, $(T_f)' = T_H$. Ținând cont de identificarea lui T_f cu f și a lui T_H cu H , obținem că $f' = H$ în sensul distribuțiilor.

3. Fie acum funcția $H : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită în exemplul precedent și să calculăm derivata ei în sensul distribuțiilor.

În primul rând să observăm că $H \in L^2(-1, 1)$ și putem defini T_H ca în (2.3). Dacă $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ obținem

$$\begin{aligned} \langle (T_H)', \varphi \rangle &= -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx = \\ &= \int_{-1}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^1 \varphi'(x) dx = 2\varphi(0) = \langle 2\delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

unde δ_0 este distribuția Dirac în 0.

Astfel, ținând cont de identificarea lui T_H cu H , $H' = 2\delta_0$ în sensul distribuțiilor.

Mai general, dacă $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a, b] \setminus \{c\}$ atunci derivata lui F în sensul distribuțiilor va fi saltul funcției F în c înmulțit cu δ_c :

$$F' = \left(F|_{c+} - F|_{c-} \right) \delta_c.$$

Lema 2.1.1 *Fie Ω un interval deschis al dreptei reale și $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ astfel încât $T' = 0$. Atunci T este constantă.*

Demonstrație: Fie $\theta_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu proprietatea că $\int_{\Omega} \theta_0(x) dx = 1$.

Pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, există o unică funcție $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu proprietatea că

$$(2.6) \quad \varphi(x) = \left(\int_{\Omega} \varphi(t) dt \right) \theta_0(x) + \frac{d\psi}{dx}(x).$$

Pentru a demonstra existența lui ψ cu proprietatea (2.6), se consideră $[a, b] \subset \Omega$ cu proprietatea că $\text{supp}(\varphi) \subset [a, b]$ și $\text{supp}(\theta_0) \subset [a, b]$ și se definește

$$\psi(x) = \int_a^x \left(\varphi(s) - \left(\int_{\Omega} \varphi(x) dx \right) \theta_0(s) \right) ds.$$

Se obține imediat că $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ $\text{supp}(\psi) \subset [a, b]$ și ψ verifică (2.6). Unicitatea este imediată.

Dacă T este distribuția cu proprietatea din enunț, avem că, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \left\langle T, \left(\int_{\Omega} \varphi(t) dt \right) \theta_0(x) + \frac{d\psi}{dx}(x) \right\rangle = \\ &= \left(\int_{\Omega} \varphi(t) dt \right) \langle T, \theta_0 \rangle + \left\langle T, \frac{d\psi}{dx}(x) \right\rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{\Omega} \varphi(t) dt \right) \langle T, \theta_0 \rangle - \langle T', \psi \rangle = \\ &= \left(\int_{\Omega} \varphi(t) dt \right) \langle T, \theta_0 \rangle \end{aligned}$$

și prin urmare T este constantă. ■

Convergența unui șir de distribuții se definește punctual și este o noțiune foarte utilă. Avem că

Definiția 2.1.4 *Un șir $(T_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge la o distribuție $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dacă*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2.2 Spațiul $H^1(\Omega)$

Următorul spațiu va juca un rol deosebit în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale

Definiția 2.2.1 *Numim spațiu Sobolev de exponent 1 în Ω ,*

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Notăți că derivatele parțiale în definiția spațiului $H^1(\Omega)$ sunt în sensul distribuțiilor. Mai precis, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ dacă există $g_i \in L^2(\Omega)$ astfel încât

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} g_i(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Să remarcăm că, dacă Ω este mărginit, $\mathcal{C}^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$ dar cele două spații nu sunt egale. De asemenea, $H^1(\Omega)$ nu este în general inclus în $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Vom ilustra aceste două proprietăți în exemplele care urmează.

1. Dacă $\Omega = (-1, 1)$ am văzut că funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, este derivabilă în sensul distribuțiilor, cu derivata H definită prin

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{dacă } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Evident, $H \in L^2(-1, 1)$ și deci $f \in H^1(-1, 1)$ dar $f \notin \mathcal{C}^1[-1, 1]$. Astfel, $\mathcal{C}^1[-1, 1] \subsetneq H^1(-1, 1)$.

2. Fie $k \in (0, \frac{1}{2})$, $\Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ și să considerăm funcția

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \ln^k \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

Avem

$$\int_{\Omega} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_0^1 \ln^{2k}(r) r dr < \infty$$

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} k^2 \ln^{2k-2}(r) \frac{\cos^2(\theta)}{r} dr d\theta < \infty$$

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} k^2 \ln^{2k-2}(r) \frac{\sin^2(\theta)}{r} dr d\theta < \infty.$$

Se obține că $f \in H^1(\Omega)$ dar $f \notin \mathcal{C}(\Omega)$. Astfel, pentru $N \geq 2$, există funcții care aparțin lui $H^1(\Omega)$ dar nu sunt continue.

Următorul produs scalar poate fi introdus în $H^1(\Omega)$:

$$(2.7) \quad (f, g)_1 = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx, \quad \forall f, g \in H^1(\Omega)$$

și notăm

$$(2.8) \quad \|f\|_{1,\Omega} = \sqrt{(f, f)_1}.$$

Reamintim că, $\|f\|_{0,\Omega} = \|f\|_{L^2}$. Dacă domeniul Ω este clar din context, el va fi omis ca indice în notația normelor.

Una dintre cele mai importante proprietăți ale spațiului $H^1(\Omega)$ este descrisă de următoarea teoremă.

Teorema 2.2.1 $H^1(\Omega)$ este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar dat de (2.7).

Demonstrație: Este ușor de văzut că (2.7) definește un produs scalar în $H^1(\Omega)$. Mai avem de arătat că $H^1(\Omega)$ este complet în raport cu acest produs scalar.

Fie $(v_n)_{n \geq 1}$ un șir din $H^1(\Omega)$, Cauchy în raport cu norma (2.8). Se obține că $(v_n)_{n \geq 1}$ și $\left(\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right)_{n \geq 1}$, $1 \leq i \leq N$, sunt șiruri Cauchy în $L^2(\Omega)$.

Cum $L^2(\Omega)$ este complet, se obține că există v , v_i , $1 \leq i \leq N$, în $L^2(\Omega)$ astfel încât

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} v_n &= v \text{ în } L^2(\Omega) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} &= v_i \text{ în } L^2(\Omega) \text{ pentru } 1 \leq i \leq N.\end{aligned}$$

Dacă arătăm că $\frac{\partial v}{\partial x_i} = v_i$ ca distribuții pentru orice $1 \leq i \leq N$ rezultă că $v \in H^1(\Omega)$ și demonstrația se încheie.

Fie $1 \leq i \leq N$ și $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Avem că

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= - \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \varphi = \int_{\Omega} v_i \varphi = \langle v_i, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Se obține că $\frac{\partial v}{\partial x_i} = v_i$ ca distribuții și teorema este demonstrată. ■

Următorul rezultat este specific dimensiunii unu.

Teorema 2.2.2 *Spațiul $H^1(a, b)$ este inclus în $\mathcal{C}[a, b]$.*

Demonstrație: Fie $u \in H^1(a, b)$. Atunci $u' \in L^2(a, b)$ și funcția v definită prin

$$v(x) = \int_a^x u'(s) ds$$

apartine lui $\mathcal{C}[a, b]$, este derivabilă a.p.t. în $[a, b]$ și $\frac{dv}{dx}(x) = u'(x)$ a.p.t. în $[a, b]$ (vezi [28]). Vom denota prin $\frac{d}{dt}$ derivata clasică, în timp ce $'$ va denota derivata în sens distribuțional.

Avem că, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$,

$$\begin{aligned}\langle v', \varphi \rangle &= -\langle v, \varphi' \rangle = - \int_a^b v(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b \int_a^x u'(s) ds \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_a^x u'(s) ds \varphi(x) \Big|_a^b + \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx = \langle u', \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Prin urmare, $v' = u'$ și conform lemei 2.1.1, $u = v + C$ unde C este o constantă reală. Cum v este o funcție continuă, rezultă că u este, de asemenea, continuă și demonstrația se încheie. ■

Observația 2.2.1 *Așa cum am văzut în exemplul 2, dacă $N \geq 2$, teorema de mai sus nu mai este adevărată.*

2.3 Spațiul $H_0^1(\Omega)$

Știm din teorema 1.3.3 că $\mathcal{D}(\Omega)$ este dens în $L^2(\Omega)$ dar nu știm dacă el este dens și în $H^1(\Omega)$. Așa cum vom vedea, răspunsul este în general negativ. Începem cu următoarea definiție.

Definiția 2.3.1 *Definim spațiul Sobolev*

$$(2.9) \quad H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}.$$

Astfel, $H_0^1(\Omega)$ este aderența lui $\mathcal{D}(\Omega)$ în $H^1(\Omega)$. Este clar că $H_0^1(\Omega)$ este tot un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar indus. Un prim rezultat privind acest nou spațiu este următorul.

Teorema 2.3.1 $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstrație: Vom parcurge doi pași:

1. Orice funcție $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ poate fi aproximată prin funcții din $H^1(\mathbb{R}^N)$ cu suport compact.

Fie $M : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ o funcție din $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ astfel încât

$$\begin{cases} M(x) = 1 & \text{pentru } |x| \leq 1 \\ 0 \leq M(x) \leq 1 & \text{pentru } 1 \leq |x| \leq 2 \\ M(x) = 0 & \text{pentru } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Pentru orice $r > 0$ definim funcția $M_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ prin $M_r(x) = M\left(\frac{x}{r}\right)$. Se obține că M_r este o funcție de suport compact care aparține lui $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pentru orice $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ și $r > 0$ avem că $M_r v$ este o funcție de suport compact din $H^1(\mathbb{R}^N)$. În plus,

$$(2.10) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} M_r v = v \text{ în } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Astfel, orice funcție din $H^1(\mathbb{R}^N)$ poate fi aproximată prin funcții din $H^1(\mathbb{R}^N)$ cu suport compact.

2. Orice funcție $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ cu suport compact poate fi aproximată prin funcții din $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Fie $(\rho_k)_{k \geq 1}$ șirul regularizant dat de (1.15). Pentru orice $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, funcție cu suport compact, definim convoluția $v_k = \rho_k \star v$,

$$v_k(x) = \rho_k \star v(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(x-y)v(y)dy.$$

Cum v are suport compact, se obține că v_k este o funcție din $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. În plus, din propoziția 1.3.4 și teorema 1.3.2,

$$(2.11) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v \text{ în } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Cum am demonstrat că orice funcție din $H^1(\mathbb{R}^N)$ cu suport compact poate fi aproximată prin funcții din $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, demonstrația teoremei se încheie. ■

Pentru a arăta că, în general, $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$, vom demonstra următoarea inegalitate care are o importanță de sine-stătătoare foarte mare.

Teorema 2.3.2 (*Inegalitatea Poincaré*) *Dacă Ω este un deschis mărginit, există o constantă $C = C(\Omega) > 0$ astfel încât*

$$(2.12) \quad \|v\|_0 \leq C \left(\int_{\Omega} \|\nabla v\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstrație: Din densitatea lui $\mathcal{D}(\Omega)$ în $H_0^1(\Omega)$ se obține că este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru funcții $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Vom nota în același fel extensia prin zero a funcțiilor v la $\mathbb{R}^N$.

Cum Ω este mărginit, există două numere reale a și b astfel încât

$$\Omega \subset \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : a \leq x_N \leq b\}.$$

Avem că,

$$v(x', x_N) = \int_a^{x_N} \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', s) ds.$$

Folosind inegalitatea Hölder rezultă că

$$|v(x', x_N)|^2 \leq (x_N - a) \int_a^{x_N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', s) \right|^2 ds \leq (x_N - a) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', s) \right|^2 ds.$$

Se obține că

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x', x_N)|^2 dx' \leq (x_N - a) \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x) \right|^2 dx$$

și

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^2 dx = \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x', x_N)|^2 dx' dx_N \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x) \right|^2 dx.$$

Astfel,

$$(2.13) \quad \|v\|_0^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x) \right|^2 dx$$

ceea ce reprezintă chiar mai mult decât (2.12). ■

Observația 2.3.1 *Din demonstrația teoremei se poate observa că inegalitatea (2.12) este adevărată și în cazul când Ω este mărginit doar într-o singură direcție. □*

Observația 2.3.2 *Din teorema 2.3.2 se obține că $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$ dacă Ω este mărginit. Într-adevăr, orice funcție constantă netrivială aparține lui $H^1(\Omega)$ dar nu verifică inegalitatea (2.12) și deci nu poate fi în $H_0^1(\Omega)$. □*

Observația 2.3.3 *Din teorema 2.3.2 rezultă că, dacă Ω este mărginit, atunci $(\int_{\Omega} |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$ este o normă în $H_0^1(\Omega)$ echivalentă cu cea indusă de $H^1(\Omega)$. □*

2.4 Teoreme de urmă

Pentru o funcție din $L^2(\Omega)$ nu are sens să vorbim de restricți ei la frontiera domeniului, care este o mulțime de măsură nulă. Așa cum am văzut în teorema 2.2.2, în cazul $N = 1$, $H^1(a, b) \subset \mathcal{C}[a, b]$. Astfel, dacă $v \in H^1(a, b)$, are sens să vorbim de $v(a)$ și $v(b)$. Pe de altă parte, exemplul 2 din secțiunea 2.2 ne-a arătat că, dacă $N \geq 2$, $H^1(\Omega) \not\subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Astfel, nu este clar dacă putem defini restricția unei funcții din $H^1(\Omega)$ la frontiera domeniului.

În această secțiune vom arăta că orice funcție din $H^1(\Omega)$ are o “urmă” pe frontiera domeniului de definiție care generalizează conceptul de restricție. Această proprietate are loc dacă frontiera domeniului este local difeomorfă cu un hiper-plan.

Să introducem mai întâi următoarele notații: $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ (respectiv $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) va denota spațiul de funcții v definite pe o mulțime deschisă $\mathcal{O}$, cu $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$, și astfel încât $v \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O})$ (respectiv $v \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$).

Vom analiza următoarele cazuri:

2.4.1 Ω este un semi-spațiu

Fie $\mathbb{R}_+^N$ și $\mathbb{R}_-^N$ semi-spațiile deschise,

$$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0\},$$

$$\mathbb{R}_-^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N < 0\}$$

și Γ frontiera lor,

$$\Gamma_N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N = 0\}.$$

Lema 2.4.1 *Spațiul $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ este dens în $H^1(\mathbb{R}_+^N)$.*

Demonstrație: Ne vom baza pe teorema 2.3.1. Dată $v \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$, introducem funcția w definită prin reflexie

$$w(x) = \begin{cases} v(x', x_N), & \text{dacă } x_N > 0 \\ v(x', -x_N), & \text{dacă } x_N < 0 \end{cases}$$

și arătăm că $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Cum,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w(x)|^2 dx = 2 \int_{\mathbb{R}_+^N} |w(x)|^2 dx$$

obținem că $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Pe de altă parte, dacă definim,

$$w_i = \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x', x_N), & \text{dacă } x_N > 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x_i}(x', -x_N), & \text{dacă } x_N < 0 \end{cases}$$

pentru $1 \leq i \leq N-1$ și

$$w_N = \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x_N}(x', x_N), & \text{dacă } x_N > 0 \\ -\frac{\partial w}{\partial x_N}(x', -x_N), & \text{dacă } x_N < 0 \end{cases}$$

obținem că $w_i \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pentru $1 \leq i \leq N$. În plus, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, avem că

$$\begin{aligned} \left\langle w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} w(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^N} w(x', x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) dx' dx_N + \int_{\mathbb{R}_-^N} w(x', -x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) dx' dx_N = \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x', x_N) \varphi(x', x_N) dx' dx_N - \int_{\mathbb{R}_-^N} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x', -x_N) \varphi(x', x_N) dx' dx_N = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} w_i(x) \varphi(x) dx = - \langle w_i, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Astfel, $\frac{\partial w}{\partial x_i} = w_i$ și prin urmare $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Din teorema 2.3.1 se obține că există un șir $(\varphi_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ astfel încât

$$\varphi_k \rightarrow w \text{ în } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Dacă ψ_k este restricția la $\mathbb{R}_+^N$ a lui φ_k obținem că $(\psi_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ și

$$\psi_k \rightarrow v \text{ în } H^1(\mathbb{R}_+^N)$$

și demonstrația se încheie. ■

Acum, dacă $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$, restricția lui v la Γ_N aparține lui $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$. În plus, avem

Lema 2.4.2 Pentru orice $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$,

$$(2.14) \quad \|v(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Demonstrație: Cum

$$\begin{aligned} |v(x', 0)|^2 &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_N} |v(x', x_N)|^2 dx_N = \\ &= -2 \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) v(x', x_N) dx_N \leq \\ &\leq \int_0^\infty \left[\left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^2 + |v(x', x_N)|^2 \right] dx_N dx' \end{aligned}$$

se obține prin integrare în x' că

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x', 0)|^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}_+^N} \left[\left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^2 + |v(x', x_N)|^2 \right] dx_N dx' = \|v\|_{H^1}^2$$

și (2.14) este demonstrată. ■

Astfel, aplicația restricție la Γ_N ,

$$v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N}) \longrightarrow v(\cdot, 0) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$$

poate fi prelungită în mod unic prin densitate (datorită lemei 2.4.1) și continuitate (datorită lemei 2.4.2) la o aplicație liniară și continuă

$$\gamma : H^1(\mathbb{R}_+^N) \rightarrow L^2(\Gamma_N).$$

Definiția 2.4.1 Pentru orice funcție $v \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$, $\gamma(v)$ se va numi **urma lui v pe Γ_N** .

Remarcați că, dacă v este regulată (de exemplu $v \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$) atunci are sens să vorbim de restricția lui v la Γ_N și $\gamma(v) = v|_{\Gamma_N}$.

2.4.2 Ω este o mulțime deschisă regulată

Pentru a extinde rezultatele din secțiunea 2.4.1 la mulțimi mai generale, este nevoie ca frontiera lui Ω să fie local cât mai asemănătoare unui hiperplan. Mai precis,

Definiția 2.4.2 *O mulțime $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este **m-regulată** dacă este mărginită și există un număr finit de mulțimi deschise $(O_i)_{0 \leq i \leq M}$ și, pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, M$, câte o aplicație $\varphi_i : O_i \rightarrow B_{\mathbb{R}^N}(0, 1)$ astfel încât*

1. $\overline{O_0} \subset \Omega$, $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^M O_i$
2. φ_i este bijectivă, φ_i și φ_i^{-1} sunt de m ori continuu diferențiabile
3.
$$\begin{cases} \varphi_i(O_i \cap \Omega) = B_{\mathbb{R}^N}(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^N = \\ \quad = \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^N : |y| < 1, y_N > 0\} \\ \varphi_i(O_i \cap \partial\Omega) = B_{\mathbb{R}^N}(0, 1) \cap \mathbb{R}^{N-1} = \\ \quad = \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^N : |y| < 1, y_N = 0\}. \end{cases}$$

O primă proprietate a mulțimilor regulate este legată de posibilitatea prelungirii funcțiilor din $H^1(\Omega)$ la funcții din $H^1(\mathbb{R}^N)$, asemănătoare proprietății demonstrate în lema 2.4.1.

Lema 2.4.3 *Dacă Ω este 1-regulată, există un operator liniar și continuu $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ astfel încât, pentru orice $v \in H^1(\Omega)$,*

$$(2.15) \quad Pv = v \text{ a.p.t. în } \Omega.$$

Demonstrație: Cazul $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ a fost deja studiat în cursul demonstrației lemei 2.4.1. Mai precis, am văzut că, dacă $v \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$, atunci funcția w definită prin reflexie

$$w(x) = \begin{cases} v(x', x_N), & \text{dacă } x_N > 0 \\ v(x', -x_N), & \text{dacă } x_N < 0 \end{cases}$$

apartine lui $H^1(\mathbb{R}^N)$. Astfel, putem defini $Pv = w$. Este ușor de văzut că P este liniar și continuu din $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ în $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Dacă Ω este mulțime deschisă 1-regulată, introducem o partiție a unității $(\alpha_i)_{i=0}^M$ subordonată acoperirii $(O_i)_{i=0}^M$ a lui Ω , adică o mulțime de funcții $(\alpha_i)_{i=0}^M$ astfel încât

$$\alpha_i \in \mathcal{D}(O_i) \text{ și } \sum_{i=0}^M \alpha_i = 1 \text{ pe } \overline{\Omega}.$$

Pentru orice $v \in H^1(\Omega)$ și $i \in \{0, 1, \dots, M\}$ vom defini $P\alpha_i v$ iar apoi vom lua

$$P(v) = \sum_{i=0}^M P\alpha_i v.$$

În primul rând, definim $P(\alpha_0 v) = w_0$, unde w_0 este extensia lui $\alpha_0 v$ prin zero la $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Apoi, pentru $1 \leq i \leq M$ considerăm funcția $w_i = (\alpha_i v) \circ (\varphi_i^{-1}|_{B_+})$ unde $B_+ = B_{\mathbb{R}^N}(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^N$.

Avem că $w_i \in H^1(B_+)$. În plus, w_i este zero într-o vecinătate a frontierei $\{y \in \partial B_+ : y_N > 0\}$. Astfel, w_i poate fi extinsă prin zero la o funcție din $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ notată $\widehat{w}_i$.

Acum, fie $P(\widehat{w}_i)$ extensia lui $\widehat{w}_i$ prin reflexie la $\mathbb{R}^N$ ca în prima parte a demonstrației. În final, definim

$$P(\alpha_i v) = \widehat{\widehat{w}_i \circ \varphi_i}$$

unde $\widehat{\widehat{w}_i \circ \varphi_i}$ este extensia prin zero a lui $\widehat{w}_i \circ \varphi_i$ la $\mathbb{R}^N \setminus O_i$. ■

Lema 2.4.4 *Dacă Ω este 1-regulat, atunci $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ este densă în $H^1(\Omega)$.*

Demonstrație: Fie $v \in H^1(\Omega)$. Din lema 2.4.3 se obține că există o funcție $Pv \in H^1(\mathbb{R}^N)$ care extinde v în $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Din teorema 2.3.1, obținem că există un șir $(w_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ care converge la Pv în $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dacă v_k este restricția lui w_k la Ω , obținem că $(v_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ este un șir convergent la v în $H^1(\Omega)$. ■

Pentru orice $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, notăm prin $\gamma(v)$ restricția lui v la frontiera Γ a lui Ω :

$$\gamma(v) = v|_{\Gamma}.$$

Avem următorul rezultat.

Lema 2.4.5 *Dacă Ω este 1-regulat, există o constantă $C > 0$ astfel încât*

$$(2.16) \quad \|\gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Demonstrație: Fie $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Ca în lema 2.4.3, introducem o partiție a unității $(\alpha_i)_{i=0}^M$ și considerăm $w_i = (\alpha_i v) \circ \varphi_i^{-1}$, $1 \leq i \leq N$. Folosind lema 2.4.2 obținem că

$$(2.17) \quad \|\widehat{w}_i\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C\|\widehat{w}_i\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Proprietățile funcțiilor φ_i și α_i implică existența unor constante $C_i, c_i > 0$ astfel încât

$$\|\widehat{w_i}\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq C_i \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\|\widehat{w_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \geq c_i \|\gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)}$$

și (2.16) este demonstrată. ■

Putem acum să dăm un sens precis restricției unei funcții din $H^1(\Omega)$ la frontiera domeniului. Avem următorul rezultat.

Teorema 2.4.1 (Teorema de urmă) *Fie Ω un deschis 1-regulat. Există o aplicație unică γ cu proprietățile:*

1. $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$
2. γ este liniară și continuă
3. $\gamma(v) = v|_{\Gamma}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$

Demonstrație: Folosind lemele 2.4.4 și 2.4.5, obținem că aplicația restricție la Γ ,

$$v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow v|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$$

poate fi extinsă în mod unic prin densitate și continuitate la o aplicație liniară și continuă

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

și demonstrația se încheie. ■

Definiția 2.4.3 *Pentru orice funcție $v \in H^1(\Omega)$, $\gamma(v)$ se va numi **urma lui v pe Γ** .*

Observația 2.4.1 *Din definiția aplicației urmă γ , $\gamma(v) = v|_{\Gamma}$ pentru orice $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Același lucru este valabil și dacă v este continuă în $\overline{\Omega}$. Într-adevăr, fie $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Există un șir $(v_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ care converge la v în $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Avem că*

$$\begin{aligned} \|\gamma(v) - v|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C [\|\gamma(v) - \gamma(v_k)\|_{L^2(\Gamma)} + \|v_k|_{\Gamma} - v|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}] \leq \\ &\leq C [\|v - v_k\|_{H^1(\Omega)} + \|(v_k - v)|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}]. \end{aligned}$$

Din convergența șirului $(v_k)_{k \geq 1}$ la v în $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, ultimul termen tinde la zero când k tinde la infinit și obținem că $\gamma(v) = v|_{\Gamma}$. □

În cele ce urmează notația $\gamma(v)$ va fi înlocuită prin mai simpla $v|_\Gamma$.

Definiția 2.4.2 arată că un deschis 1-regulat nu poate avea colțuri. Putem defini o clasă mai largă de deschiși care să cuprindă și astfel de cazuri.

Definiția 2.4.4 *O mulțime $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este 1-regulată pe porțiuni dacă este mărginită și există un număr finit de mulțimi deschise $(O_i)_{0 \leq i \leq M}$ și, pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, M$, câte o aplicație $\varphi_i : O_i \rightarrow B_{\mathbb{R}^N}(0, 1)$ astfel încât*

1. $\overline{O_0} \subset \Omega$, $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^M O_i$
2. φ_i este bijectivă, φ_i și φ_i^{-1} sunt continuu diferențiabile
3.
$$\begin{cases} \varphi_i(O_i \cap \Omega) = B_{\mathbb{R}^N}(0, 1) \cap C_i \\ \varphi_i(O_i \cap \partial\Omega) = B_{\mathbb{R}^N}(0, 1) \cap \partial C_i \end{cases}$$

C_i fiind $\mathbb{R}_+^N$, un con deschis sau complementara unui con închis din $\mathbb{R}_+^N$.

Rezultatele acestui paragraf se generalizează cu ușurință la cazul unui deschis 1-regulat pe porțiuni.

2.5 Aplicații ale teoremei de urmă

Dacă Ω este o mulțime 1-regulată, prin ν vom denota normala exterioară unitară în fiecare punct al frontierei Γ a lui Ω . Prin ν_i vom denota componenta i a lui ν . Vom demonstra acum o generalizare a formulei lui Green care este de mare utilitate.

Teorema 2.5.1 *Fie Ω o mulțime 1-regulată. Dacă u și v sunt două funcții din $H^1(\Omega)$ atunci*

$$(2.18) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u v \nu_i d\sigma.$$

Demonstrație: Fie $(u_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ și $(v_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ două șiruri care converg la u și respectiv v în $H^1(\Omega)$. Pentru funcțiile regulate u_k și v_k formula clasică a lui Green este adevărată și avem că

$$(2.19) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v_k dx = - \int_{\Omega} u_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u_k v_k \nu_i d\sigma.$$

Din convergența șirurilor $(u_k)_{k \geq 1}$ și $(v_k)_{k \geq 1}$ la u și respectiv v și teorema 2.4.1 obținem că $\gamma(u_k) \rightarrow \gamma(u)$ și $\gamma(v_k) \rightarrow \gamma(v)$ în $L^2(\Gamma)$. Astfel, putem trece la limită în (2.19) și (2.18) este demonstrată. ■

Vom da în cele ce urmează o caracterizare utilă a funcțiilor din $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 2.5.2 *Fie Ω o mulțime deschisă 1-regulată. Pentru orice $v \in H^1(\Omega)$ definim extensia prin zero a lui v la $\mathbb{R}^N$,*

$$\widehat{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{dacă } x \in \Omega \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Următoarele proprietăți sunt echivalente:

1. $v \in H_0^1(\Omega)$
2. $\widehat{v} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstrație: Fie $v \in H_0^1(\Omega)$. Există un șir $(\varphi_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ convergent în $H^1(\Omega)$ la v . Fie $\widehat{\varphi}_k$ extensia prin zero la $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ a lui φ_k . Evident, $(\widehat{\varphi}_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Dacă arătăm că $(\widehat{\varphi}_k)_{k \geq 1}$ converge la $\widehat{v}$ în $H^1(\mathbb{R}^N)$ obținem că $\widehat{v} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Cum $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ converge în $H^1(\Omega)$ la v se obține că $(\widehat{\varphi}_k)_k$ este un șir Cauchy în $H^1(\mathbb{R}^N)$. Deci, există $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ astfel încât $\widehat{\varphi}_k \rightarrow w$ în $H^1(\mathbb{R}^N)$ când k tinde la infinit. Evident, $w|_\Omega = v$.

Pentru a arăta că $w = \widehat{v}$ să observăm că $\widehat{\varphi}_k \rightarrow w$ în $L^2(\mathbb{R}^N)$ când k tinde la infinit. Se obține că există un subșir al lui $(\widehat{\varphi}_k)_k$ care converge aproape peste tot la w în Ω . Astfel, $w = 0$ a.p.t. în $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ și prin urmare $w = \widehat{v}$.

Fie acum $v \in H^1(\Omega)$ astfel încât $\widehat{v} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Folosind hărți locale și o partiție a unității, reducem problema la următoarea proprietate: dacă $u \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$ are suport compact și $\widehat{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ atunci $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$. Prin $\widehat{u}$ vom nota extensia prin zero a lui u la $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}_+^N$.

Pentru fiecare $k \geq 1$, introducem funcția $w_k(x) = \widehat{u}(x', x_N - \frac{1}{k})$. Vom obține că $w_k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ și $(w_k)_{k \geq 1}$ converge la $\widehat{u}$ în $H^1(\mathbb{R}^N)$. Remarcăm că $\text{supp}(w_k) \subset \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N \geq \frac{1}{k}\}$.

Dacă $(\rho_n)_{n \geq 1}$ este un șir regularizant, definim $\varphi_n = \rho_n \star w_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ și avem că $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge la w_k când n tinde la infinit. Luând n suficient de mare (de exemplu, $n > \frac{1}{2k}$) obținem că $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$.

Astfel, am construit un șir din $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$ care converge la u în $H^1(\mathbb{R}_+^N)$. Se obține că $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ și demonstrația se încheie. ■

Observația 2.5.1 Prima parte a demonstrației teoremei 2.5.2 arată că orice funcție din $H_0^1(\Omega)$ se poate prelungi prin zero în afara lui Ω , obținându-se o funcție din $H^1(\mathbb{R}^N)$, fără nici o ipoteză suplimentară asupra lui Ω . Cerința ca Ω să fie 1-regulat intervine doar în a doua parte a demonstrației teoremei. $\square$

În cele ce urmează vom caracteriza elementele lui $H_0^1(\Omega)$ ca fiind acele funcții din $H^1(\Omega)$ care se anulează pe frontiera lui Ω . Mai precis, avem că

Teorema 2.5.3 Dacă Ω este mulțime 1-regulată atunci

$$(2.20) \quad H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = 0\}.$$

Demonstrație: Mai întâi demonstrăm incluziunea

$$H_0^1(\Omega) \subseteq \{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = 0\}.$$

Fie $v \in H_0^1(\Omega)$. Există un șir $(v_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ care converge la v în $H^1(\Omega)$. Din continuitatea aplicației urmă se obține că $\gamma(v)$ este limita șirului $(\gamma(v_k))_{k \geq 1}$ când k tinde la infinit. Cum însă $\gamma(v_k) = 0$ pentru fiecare k , rezultă că $\gamma(v) = 0$.

Să demonstrăm acum incluziunea

$$\{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = 0\} \subseteq H_0^1(\Omega).$$

Fie $v \in H^1(\Omega)$ astfel încât $v|_{\Gamma} = 0$ și fie $\widehat{v}$ extensia prin zero la $\mathbb{R}^N$. Dacă demonstrăm că $\widehat{v} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, din teorema 2.5.2, obținem că $v \in H_0^1(\Omega)$.

Evident, $\widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Fie acum $\widehat{v}_i$ extensia prin zero la $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ a lui $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Avem că $\widehat{v}_i \in L^2(\mathbb{R}^N)$. În plus, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, aplicând formula lui Green, avem că

$$\begin{aligned} \langle \widehat{v}_i, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{v}_i(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = \\ &= - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\Gamma} v(x) \varphi(x) \nu_i(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx, \end{aligned}$$

ultima relație având loc deoarece $\gamma(v) = 0$.

Prin urmare, obținem că

$$\langle \widehat{v}_i, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) v(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \widehat{v}(x) dx = - \left\langle \widehat{v}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Se obține că $\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x_i} = \widehat{v}_i \in L^2(\Omega)$ și prin urmare $\widehat{v} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. $\blacksquare$

Observația 2.5.2 Rezultatele acestui paragraf se generalizează cu ușurință la cazul unui deschis 1-regulat pe porțiuni. $\square$

2.6 Spațiul Sobolev $H^m(\Omega)$

Vom generaliza definiția spațiului $H^1(\Omega)$ în felul următor.

Definiția 2.6.1 Pentru orice întreg $m \geq 1$, numim **spațiu Sobolev de exponent m în Ω** ,

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

În $H^m(\Omega)$ se definește produsul scalar

$$(2.21) \quad (u, v)_{m, \Omega} = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u D^\alpha v \right) dx$$

și notăm

$$(2.22) \quad \|u\|_{m, \Omega} = \sqrt{(u, u)_{m, \Omega}}.$$

Atunci când domeniul va fi clar din context, vom omite indicele Ω în (2.21) și (2.22).

La fel ca în teorema 2.2.1, avem că

Teorema 2.6.1 $H^m(\Omega)$ este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar dat de (2.21).

Generalizarea teoremei de urmă în cazul spațiului $H^2(\Omega)$ este următoarea

Teorema 2.6.2 Dacă Ω este un deschis 1-regulat, aplicația

$$v \rightarrow \vec{\gamma}(v) = \left(v|_{\Gamma}, \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma} \right)$$

din $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ în $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ se prelungește la o aplicație liniară și continuă din $H^2(\Omega)$ în $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.

Demonstrație: Din teorema 2.4.1 avem că aplicația

$$v \rightarrow v|_{\Gamma}$$

din $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ în $L^2(\Gamma)$ se prelungește la o aplicație liniară și continuă din $H^1(\Omega)$ în $L^2(\Gamma)$. Același lucru este adevărat și pentru

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\Gamma}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Cum $\nu \in L^\infty(\Gamma)$, obținem că aplicația

$$v \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\Gamma$$

este liniară și continuă din $H^2(\Omega)$ în $L^2(\Gamma)$ și demonstrația se încheie. ■

Observația 2.6.1 *Prelungirea aplicației $\vec{\gamma}$ din teorema 2.6.2 este unică dacă $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ este dens în $H^2(\Omega)$. Acest lucru este adevărat dacă Ω are frontieră 2-regulată (vezi exercițiul 6). Pentru demonstrația teoremei 2.6.2 nu am avut nevoie decât de densitatea lui $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ în $H^1(\Omega)$, ceea ce este adevărat dacă Ω are frontieră 1-regulată. □*

Avem, de asemenea, următoarea formulă a lui Green.

Teorema 2.6.3 *Fie Ω o mulțime 1-regulată. Dacă $u \in H^2(\Omega)$ și $v \in H^1(\Omega)$ atunci*

$$(2.23) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma.$$

Demonstrație: Folosind formula lui Green din teorema 2.5.1, avem că

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i d\sigma$$

și (2.23) se obține prin însumarea egalităților pentru $1 \leq i \leq N$. ■

Observația 2.6.2 *Toate rezultatele anterioare sunt valabile, de asemenea, în cazul unui deschis 1-regulat pe porțiuni. □*

Amintim în final următoarele rezultate de incluziune datorate lui Sobolev, Rellich și Kondrashov, a căror demonstrație se poate găsi în [4].

Teorema 2.6.4 *Fie Ω o mulțime din $\mathbb{R}^N$ 1-regulată pe porțiuni. Avem că*

1. *Spațiul $H^1(\Omega)$ este inclus cu compacitate în $L^2(\Omega)$.*
2. *Pentru orice $m \geq 1$, $H^m(\Omega)$ este inclus cu compacitate în $H^{m-1}(\Omega)$.*
3. *Dacă $m > \frac{N}{2}$ atunci $H^m(\Omega)$ este inclus cu compacitate în $C(\bar{\Omega})$.*

2.7 O familie de inegalități

Vom demonstra în această secțiune o inegalitate foarte generală, cu ajutorul căreia vom deduce mai multe inegalități de tip Poincaré.

Teorema 2.7.1 *Se consideră spațiul vectorial normat $(X_0, \|\cdot\|_0)$ și spațiul Banach $(X_1, \|\cdot\|_1)$ astfel încât $X_1 \subset X_0$ cu incluziune compactă și $\|\cdot\|$ este o seminormă pe X_1 , unde*

$$\|x\| = \|x\|_1 - \|x\|_0, \quad \forall x \in X_1.$$

Dacă $Y = \{x \in X_1 : \|x\| = 0\}$ iar $L : X_1 \rightarrow Y$ este un operator proiecție (liniar, surjectiv, continuu, $L \circ L = L$) atunci există o constantă $C > 0$ astfel încât

$$(2.24) \quad \|x - Lx\|_0 \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X_1.$$

Demonstrație: Pentru sistematizare, vom parcurge mai mulți pași:

1. Arătăm că $X_1 = \text{Ker } L \oplus \text{Im } L$.

Pentru fiecare $x \in X_1$ putem scrie $x = (x - Lx) + Lx$. Evident, $Lx \in \text{Im } L$ și $(x - Lx) \in \text{Ker } L$ deoarece

$$L(x - Lx) = Lx - (L \circ L)x = Lx - Lx = 0.$$

Fie acum $x \in \text{Ker } L \cap \text{Im } L$. Cum $x \in \text{Im } L$, există $y \in X_1$ astfel încât $x = Ly$ și prin urmare

$$x = Ly = (L \circ L)y = Lx = 0,$$

ultima egalitate fiind adevărată deoarece $x \in \text{Ker } L$.

Să mai observăm că, din surjectivitatea lui L , rezultă că $\text{Im } L = Y$.

2. Arătăm că, dacă $x \in X_1$ și $x = z + y$ cu $z \in \text{Ker } L$ și $y \in Y$, atunci $\|x\| = \|z\|$. Într-adevăr, avem că

$$\|x\| = \|z + y\| \leq \|z\| + \|y\| = \|z\|$$

$$\|z\| = \|z + y - y\| \leq \|z + y\| + \|-y\| = \|z + y\| = \|x\|.$$

3. Arătăm că $(\text{Ker } L, \|\cdot\|)$ este un spațiu vectorial normat. Avem că

$$\|\lambda x\| = \|\lambda x\|_1 - \|\lambda x\|_0 = |\lambda|(\|x\|_1 - \|x\|_0) = |\lambda|\|x\|.$$

Pe de altă parte, dacă $x \in \text{Ker } L$ cu $\|x\| = 0$ atunci $x \in Y$ (din definiția lui Y) și prin urmare $x = 0$ deoarece $\text{Ker } L \cap \text{Im } L = \{0\}$.

Să mai observăm, de asemenea, că $(\text{Ker } L, \|\cdot\|_1)$ este spațiu Banach deoarece $\text{Ker } L = L^{-1}(\{0\})$ și L , fiind continuă în X_1 , duce mulțimi închise în mulțimi închise.

4. Demonstrăm că există $C > 0$ astfel încât

$$(2.25) \quad \|z\|_0 \leq C\|z\|, \quad \forall z \in \text{Ker } L.$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că există $C' > 1$ astfel încât, pentru orice $z \in \text{Ker } L$, avem că

$$(2.26) \quad \|z\|_0 + \|z\| = \|z\|_1 \leq \frac{1}{2}\|z\|_0 + C'\|z\|.$$

Prin reducere la absurd, să presupunem că (2.26) este falsă. Rezultă că, pentru orice $n \geq 1$, există $x_n \in \text{Ker } L$ astfel încât

$$\|x_n\|_1 > \frac{1}{2}\|x_n\|_0 + n\|x_n\|.$$

Definim $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$ și observăm că $(y_n)_{n \geq 1}$, fiind mărginit în X_1 este relativ compact în X_0 . Prin urmare, există un subșir, notat la fel, care converge la y în X_0 .

Pe de altă parte,

$$\|y_n\| < \frac{1}{n}\|y_n\|_1 = \frac{1}{n}$$

și prin urmare $(y_n)_{n \geq 1}$ converge la 0 în norma $\|\cdot\|$.

Fiind convergent atât în norma $\|\cdot\|_0$ cât și în norma $\|\cdot\|$, șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este Cauchy în norma $\|\cdot\|_1$, și prin urmare există $\tilde{y} \in X_1$ astfel încât $(y_n)_{n \geq 1}$ tinde la $\tilde{y}$ în X_1 .

Cum $\text{Ker } L$ este închis în X_1 , rezultă că $\tilde{y} \in \text{Ker } L$.

Din $\|y_n - y\|_0 \leq \|y_n - y\|_1$, rezultă că $\tilde{y} = y$. De asemenea, avem că

$$\|y\|_1 = \|\tilde{y}\|_1 = 1.$$

Pe de altă parte

$$1 = \|y_n\|_1 = \|y_n\|_0 + \|y_n\|.$$

Trecând la limită obținem că $\|y\|_0 = 1$ și prin urmare

$$\|y\| = \|y\|_1 - \|y\|_0 = 0.$$

Folosind punctul 3, rezultă că $y = 0$ ceea ce este o contradicție.

5. Demonstrăm că, pentru orice $x \in X_1$ are loc (2.24). Folosind punctul 1, scriem $x = z + y$ cu $z \in \text{Ker } L$ și $y \in Y$ și observăm că

$$\|x - Lx\|_0 = \|z + y - Lz - Ly\|_0 = \|z\|_0.$$

Din inegalitatea (2.25) rezultă că

$$\|x - Lx\|_0 = \|z\|_0 \leq C\|z\|.$$

Acum, folosind punctul 2, obținem că

$$\|x - Lx\|_0 \leq C\|z\| = C\|z + y\| = C\|x\|$$

și teorema este demonstrată. ■

Folosind teorema 2.7.1, vom deduce o serie de inegalități de tip Poincaré foarte utile. Începem cu o nouă demonstrație a teoremei 2.3.2.

Corolarul 2.7.1 *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis 1-regulat. Există o constantă pozitivă $C > 0$ astfel încât*

$$(2.27) \quad \|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstrație: Cu notațiile teoremei 2.7.1, luăm

$$X_0 = L^2(\Omega), \quad \|u\|_0 = \|u\|_{L^2},$$

$$X_1 = H^1(\Omega), \quad \|u\|_1 = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2},$$

$$Y = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u = \text{constantă}\} = \mathbb{R},$$

$$L(u) = \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u.$$

Norma $\|\cdot\|_1$ este echivalentă cu norma uzuală din $H^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_{H^1}$. De asemenea, să observăm că

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Cum Ω este 1-regulat, X_1 este inclus cu compacitate în $L^2(\Omega)$.

Din teorema 2.7.1 deducem că există o constantă $C > 0$ astfel încât

$$\left\| u - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u \right\|_0 \leq C\|u\|, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Inegalitatea (2.27) se obține ținând cont că, pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$, $Lu = 0$. ■

Corolarul 2.7.2 Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis 1-regulat și $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ cu $|\Gamma_0| > 0$. Există o constantă pozitivă $C > 0$ astfel încât

$$(2.28) \quad \|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Demonstrație: Ca în teorema 2.7.1, luăm

$$X_0 = L^2(\Omega), \quad \|u\|_0 = \|u\|_{L^2},$$

$$X_1 = H^1(\Omega), \quad \|u\|_1 = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2},$$

$$Y = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u = \text{constantă}\} = \mathbb{R},$$

$$L(u) = \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} u.$$

Fiind îndeplinite condițiile teoremei 2.7.1, din (2.24) deducem că (2.28) este adevărată. ■

Corolarul 2.7.3 Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis 1-regulat. Există o constantă pozitivă $C > 0$ astfel încât

$$(2.29) \quad \left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \right\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demonstrație: Considerăm

$$X_0 = L^2(\Omega), \quad \|u\|_0 = \|u\|_{L^2},$$

$$X_1 = H^1(\Omega), \quad \|u\|_1 = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2},$$

$$Y = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u = \text{constantă}\} = \mathbb{R},$$

$$L(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u.$$

Din teorema 2.7.1 deducem exact (2.29). ■

Observația 2.7.1 Se obține din (2.29) că inegalitatea

$$(2.30) \quad \|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$$

este verificată de orice funcție $u \in \tilde{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u = 0\}$. □

Corolarul 2.7.4 Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis 1-regulat. Există o constantă pozitivă $C > 0$ astfel încât

$$(2.31) \quad \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \leq C \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2}, \quad \forall u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega).$$

Demonstrație: Este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru funcții din $\mathcal{D}(\Omega)$. Avem că

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2}^2.$$

Demonstrația se încheie luând ε suficient de mic și folosind (2.27). ■

2.8 Exerciții

1. Demonstrați că dacă $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ atunci aplicația

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

este bine definită și reprezintă o distribuție în Ω .

2. Dacă Ω este un deschis mărginit din $\mathbb{R}^N$, $u \in H^1(\Omega)$ și $v \in C^1(\overline{\Omega})$, atunci $uv \in H^1(\Omega)$.
3. Dacă Ω_1 și Ω_2 sunt doi deschiși din $\mathbb{R}^N$, $u \in H^1(\Omega_1)$ iar $\varphi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ este o funcție de clasă C^1 , atunci $u \circ \varphi \in H^1(\Omega_2)$.
4. Presupunem că Ω este un deschis 1-regulat din $\mathbb{R}^N$. Demonstrați inegalitatea Poincaré folosind metoda reducerii la absurd și compacitatea incluziunii lui $H^1(\Omega)$ în $L^2(\Omega)$.
5. Delta lui Dirac δ_0 este o distribuție care nu aparține lui $L^2(B_{\mathbb{R}^N}(0, 1))$, adică nu există nici o funcție $f \in L^2(B_{\mathbb{R}^N}(0, 1))$ astfel încât

$$\varphi(0) = \int_{B_{\mathbb{R}^N}(0, 1)} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B_{\mathbb{R}^N}(0, 1)).$$

6. Dacă Ω este un deschis 2-regulat din $\mathbb{R}^N$, atunci $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ este dens în $H^2(\Omega)$.

Capitolul 3

Probleme eliptice variaționale

În acest capitol vom introduce o clasă largă de probleme variaționale și vom studia existența și unicitatea soluțiilor lor. Mai întâi vom considera cazul abstract iar apoi vom particulariza, analizând probleme de tip Poisson, Stokes, elasticitate etc. Metodele variaționale introduse în acest capitol vor sta la baza procesului de aproximare prin metoda elementului finit a cărui descriere se va face în capitolele următoare.

3.1 Probleme variaționale abstracte

Fie V un spațiu Hilbert cu produsul scalar $(\cdot, \cdot)$ și norma $\|\cdot\|$.

Considerăm o formă a biliniară, continuă și coercivă în V . Mai precis, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este o aplicație cu proprietățile

1. Biliniaritatea: Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $u, v, w \in V$ avem

$$\begin{cases} a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \\ a(w, \alpha u + \beta v) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v). \end{cases}$$

2. Continuitatea: Există o constantă pozitivă $M > 0$ astfel încât, pentru orice $u, v \in V$,

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|.$$

3. Coercivitatea: Există o constantă pozitivă $m > 0$ astfel încât, pentru orice $u \in V$,

$$m \|u\|^2 \leq a(u, u).$$

Considerăm, de asemenea, o formă L liniară și continuă în V , adică o aplicație $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

1. Linearitatea: Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $u, v \in V$ avem

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

2. Continuitatea: Există o constantă pozitivă $C > 0$ astfel încât, pentru orice $u \in V$,

$$|L(u)| \leq C\|u\|.$$

Studiem acum următoarea problemă variațională: găsiți $u \in V$ astfel încât

$$(3.1) \quad a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Următorul rezultat este cunoscut ca teorema Lax-Milgram și oferă un răspuns la problema (3.1).

Teorema 3.1.1 (*Lax-Milgram*) *Fie V un spațiu Hilbert. Dacă a este o formă biliniară, continuă și coercivă iar L este o formă liniară și continuă în V , atunci problema (3.1) are o soluție unică $u \in V$.*

Demonstrație: Cum L este liniară și continuă în V , din teorema de reprezentare a lui Riesz, se obține că există $f \in V$ astfel încât

$$(3.2) \quad L(v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Cum a este biliniară și continuă în V , pentru fiecare $w \in V$, aplicația

$$a(w, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$$

este liniară și continuă în V . Aplicând din nou teorema lui Riesz, se obține că, pentru fiecare $w \in V$, există un unic element $A(w) \in V$ astfel încât

$$(3.3) \quad a(w, v) = (A(w), v), \quad \forall v \in V.$$

Astfel, am definit operatorul $A : V \rightarrow V$. Este ușor de văzut că A este liniar. În plus, din

$$\|A(w)\|^2 = (A(w), A(w)) = a(w, A(w)) \leq M\|w\| \|A(w)\|,$$

se obține că A este de asemenea continuu în V și $\|A\| \leq M$.

Cu (3.2) și (3.3), problema (3.1) se reduce la a arăta că, pentru orice $f \in V$, există un unic $u \in V$ astfel încât

$$(3.4) \quad A(u) = f.$$

Pentru a demonstra acest lucru, definim aplicația $T : V \rightarrow V$

$$T(w) = w - \mu(A(w) - f)$$

unde $\mu > 0$ este un număr pozitiv real ce va fi ales mai târziu.

Notăți că $A(u) = f$ dacă și numai dacă $T(u) = u$. Astfel, u este o soluție a problemei (3.4) dacă și numai dacă u este un punct fix al aplicației T .

Vom demonstra că T este o contracție în V pentru un μ ales corespunzător. Din teorema lui Banach va rezulta că T are un punct fix unic și demonstrația se va încheia. Avem că

$$\begin{aligned} \|T(w_1) - T(w_2)\|^2 &= \|w_1 - w_2 - \mu A(w_1 - w_2)\|^2 = \\ &= \|w_1 - w_2\|^2 + \mu^2 \|A(w_1 - w_2)\|^2 - 2\mu(A(w_1 - w_2), w_1 - w_2) = \\ &= \|w_1 - w_2\|^2 + \mu^2 \|A(w_1 - w_2)\|^2 - 2\mu a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \leq \\ &\leq (1 + \mu^2 M^2 - 2m\mu) \|w_1 - w_2\|^2. \end{aligned}$$

Dacă alegem $\mu = \frac{m}{M^2}$, obținem că

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|^2 \leq \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right) \|w_1 - w_2\|^2$$

și T este o contracție în V . Demonstrația este acum completă. ■

Observația 3.1.1 *Se poate demonstra direct că operatorul A definit mai sus este surjectiv, adică $R(A) = V$. Într-adevăr, din continuitatea lui A deducem că $R(A)$ este închis în V . Pe de altă parte, este ușor de văzut că $R(A)^\perp = \{0\}$. □*

Vom presupune în continuare că forma biliniară, continuă și coercivă a este, în plus, simetrică:

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

În acest caz particular dispunem de o demonstrație mai simplă a teoremei Lax-Milgram. În plus, soluția problemei variaționale (3.1) poate fi obținută printr-un proces de minimizare.

Definim funcționala $\mathcal{J} : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Teorema 3.1.2 Fie a și L ca în teorema 3.1.1. Dacă, în plus, a este simetrică, atunci problema (3.1) are o unică soluție $u \in V$ care verifică

$$(3.5) \quad \mathcal{J}(u) = \min_{v \in V} \mathcal{J}(v).$$

Demonstrație: Din proprietățile lui a deducem că

$$v, w \longrightarrow a(v, w)$$

definește un produs scalar în V echivalent cu cel inițial.

Cum L este liniară și continuă în raport cu norma introdusă de noul produs scalar, din teorema de reprezentare a lui Riesz, obținem că există o unică $u \in V$ astfel încât (3.1) este verificată.

Pentru a arăta că u este minimizatorul funcției $\mathcal{J}$, să observăm că

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) &= \left(\frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \right) - \left(\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}a(v - u, v) - L(v) + \frac{1}{2}L(v) \right) + \frac{1}{2}a(u, u) = \\ &= \left(\frac{1}{2}a(v - u, v) - \frac{1}{2}L(v) \right) + \left(\frac{1}{2}a(u - v, u) + \frac{1}{2}L(v) \right) = \\ &= \frac{1}{2}a(v - u, v - u) \geq m\|v - u\|^2. \end{aligned}$$

Se obține că $\mathcal{J}(u) = \min_{v \in V} \mathcal{J}(v)$ și demonstrația se încheie. ■

Să remarcăm că (3.5) are și o interpretare mecanică: energia corespunzătoare poziției de echilibru este minimă.

Observația 3.1.2 Relația (3.1) reprezintă condiția Euler pentru funcționala $\mathcal{J}$. Este ușor de verificat că $\mathcal{J}$ este diferențiabilă în orice punct $w_0 \in V$ și $J'(w_0)(v) = a(w_0, v) - L(v)$. Într-adevăr avem că,

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(w_0 + v) - \mathcal{J}(w_0) - (a(w_0, v) - L(v)) = \\ &= \frac{1}{2}(a(w_0 + v, w_0 + v) - L(w_0 + v)) - \frac{1}{2}a(w_0, w_0) + L(w_0) - a(w_0, v) + L(v) = \\ &= \frac{1}{2}a(v, v). \end{aligned}$$

Se obține că ,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{J}(w_0 + v) - \mathcal{J}(w_0) - (a(w_0, v) - L(v))\|}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{a(v, v)}{2\|v\|} = 0.$$

Din continuitatea lui a rezultă că J este diferențiabilă (Fréchet) în w_0 și $J'(w_0)(v) = a(w_0, v) - L(v)$.

Obținem că u este soluție a lui (3.1) dacă și numai dacă $\mathcal{J}'(u) = 0$. Astfel, u este un punc critic al lui $\mathcal{J}$.

Finalmente să remarcăm că, în multe ecuații eliptice (neliniare), existența soluțiilor este obținută prin aceeași metodă: se definește o funcțională și se demonstrează existența minimului. Apoi, cum minimul este un punct critic al funcționalei, se obține că este, de asemenea, soluție slabă a problemei eliptice inițiale. $\square$

Existența minimului funcționalei $\mathcal{J}$ este asigurată de următoarea teoremă, foarte importantă în calculul variațional (vezi [4])

Teorema 3.1.3 *Fie X un spațiu reflexiv și $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională convexă, semi-continuu inferior și cu proprietatea de coercivitate*

$$(3.6) \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} J(x) = \infty.$$

Atunci există $u \in X$ cu proprietatea că

$$(3.7) \quad J(u) = \min_{v \in X} J(v).$$

În cazul funcționalei $\mathcal{J}$ sunt îndeplinite condițiile din teorema 3.1.3 și prin urmare problema (3.5) are o soluție.

3.2 Problema Poisson

Fie Ω o mulțime 1-regulată din $\mathbb{R}^N$. Vom nota prin ν normala exterioară unitară la frontiera $\partial\Omega$ a lui Ω . În plus, vom presupune că $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, unde Γ_0 și Γ_1 sunt două submulțimi disjuncte ale lui $\partial\Omega$, cu Γ_0 de măsură nenulă.

Definim operatorul **eliptic de ordin doi**

$$Au = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) + a_0 u$$

unde $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ sunt funcții definite în Ω cu proprietățile

1. $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq N$,

2. $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_j \xi_i \geq \alpha |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$ a.p.t. în Ω
3. $a_0(x) \geq \alpha_0$, a.p.t. în Ω ,

iar α și α_0 sunt două constante pozitive.

De asemenea, introducem operatorul de derivare normală pe bord

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i.$$

Vom considera ecuația eliptică

$$(3.8) \quad \begin{cases} Au = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 & \text{pe } \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{cases}$$

Termenul neomogen f este o funcție din $L^2(\Omega)$. Ecuația (3.8) este de tip eliptic iar condițiile pe frontieră sunt de tip Dirichlet pe Γ_0 și de tip Neumann pe Γ_1 . Astfel, (3.8) reprezintă o problemă eliptică de ordin doi, cu condiții la limită mixte Dirichlet-Neumann.

Ecuația (3.8) poate reprezenta poziția de echilibru a unei membrane elastice asupra căreia acționează forța f și care are partea de pe Γ_0 fixată iar cea de pe Γ_1 liberă.

Din punct de vedere matematic (și, de asemenea, numeric) este foarte utilă introducerea unei formulări variaționale a lui (3.8) și a noțiunii de soluție slabă. Pentru a justifica aceste concepte să presupunem că (3.8) are o soluție u . Dacă înmulțim ecuația printr-o funcție regulată φ și integrăm în Ω , obținem că

$$(3.9) \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0 u \varphi \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Observați că, în (3.9), toate cantitățile au sens dacă u și φ aparțin lui $H^1(\Omega)$ iar f aparține lui $L^2(\Omega)$. Astfel, se poate studia existența unei funcții $u \in H^1(\Omega)$ care verifică (3.9) pentru orice $v \in H^1(\Omega)$. În plus, pentru a incorpora condițiile la limită de tip Dirichlet din (3.8), vom cere ca funcția u să aparțină spațiului

$$(3.10) \quad V = H_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Definim în V forma biliniară a și forma liniară L astfel

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0 u \varphi \right) dx, \quad L(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Obținem că (3.9) se scrie în mod echivalent

$$(3.11) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V.$$

Vom adopta (3.11) ca formulare variațională a problemei (3.8). Mai precis, avem

Definiția 3.2.1 *O funcție $u \in H_{\Gamma_0}(\Omega)$ este **soluție slabă** a lui (3.8) dacă (3.11) se verifică pentru orice $\varphi \in H_{\Gamma_0}(\Omega)$.*

Folosind teorema Lax-Milgram, obținem următorul rezultat de existență și unicitate a soluției lui (3.11).

Teorema 3.2.1 *Există o unică soluție slabă a lui (3.8), $u \in H_{\Gamma_0}(\Omega)$.*

Demonstrație: Vom arăta că ipotezele teoremei 3.1.2 sunt verificate. Astfel, este ușor de văzut că V este un spațiu Hilbert (subspațiu închis al spațiului Hilbert $H^1(\Omega)$). În plus, a este biliniară, continuă și simetrică și L este liniară și continuă. Faptul că a este coercivă se obține din corolarul 2.7.2. Folosind acum teorema 3.1.2, obținem că (3.11) are o soluție unică $u \in H_{\Gamma_0}(\Omega)$. ■

Observația 3.2.1 *Formularea variațională (3.11) are și o interpretare mecanică. Dacă vom considera că (3.8) reprezintă ecuația pentru poziția de echilibru a unei membrane elastice, (3.11) ne spune că lucrul mecanic virtual este zero pentru orice posibilă deplasare virtuală din poziția de echilibru. □*

Pentru a vedea în ce sens soluția slabă u verifică ecuația (3.8), să observăm că, folosind regulile de derivare distribuțională,

$$(3.12) \quad \langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Prin urmare u verifică ecuația (3.8) în sensul distribuțiilor. Cum însă $f \in L^2(\Omega)$, rezultă din (3.12) că $Au \in L^2(\Omega)$ și ecuația (3.8) se verifică în $L^2(\Omega)$, adică

$$(3.13) \quad Au(x) = f(x), \text{ a.p.t. în } \Omega.$$

În ceea ce privesc condițiile la limită, remarcăm că $u \in H_{\Gamma_0}(\Omega)$ implică $u|_{\Gamma_0} = 0$, în sensul urmei. Deci condiția Dirichlet se verifică în sensul urmei în $H^1(\Omega)$.

Pentru condițiile de tip Neumann, vom presupune în plus că funcțiile $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Va rezulta că $\sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}$ aparține lui $H^1(\Omega)$. Putem utiliza acum formula Green și obținem că,

$$\int_{\Omega} f v dx = a(u, v) = \int_{\Omega} A u v dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v d\sigma.$$

Din (3.13) rezultă că

$$(3.14) \quad \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v = 0, \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Să observăm că, dacă spațiul $\{v|_{\Gamma_1} \mid v \in H_{\Gamma_0}(\Omega)\}$ este dens în $L^2(\Gamma_1)$, din (3.14), se obține că

$$(3.15) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0$$

și condiția la limită Neumann din (3.8) este verificată a.p.t. pe Γ_1 .

Finalmente, să notăm că, în timp ce condiția pe frontieră de tip Dirichlet este inclusă în definiția spațiului unde căutăm soluția, condiția Neumann este implicit cuprinsă în formularea variațională a problemei.

3.3 Sistemul Stokes

Considerăm un deschis mărginit Ω din $\mathbb{R}^2$ și sistemul

$$(3.16) \quad \begin{cases} -\mu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i & \text{în } \Omega, \quad i = 1, 2 \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{în } \Omega \\ \vec{u} = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

În (3.16), $\vec{u} = (u_1, u_2)$ și $\vec{f} = (f_1, f_2)$ sunt două funcții vectoriale iar p este o funcție reală, definite toate în Ω .

Sistemul (3.16) descrie scurgerile staționare ale unui fluid vâscos, incompresibil. La obținerea lor, se presupune că vâscozitatea este suficient de mare încât să putem neglija termenii neliniari de transport în ecuația Euler. Observați că (3.16) se obține ca regim staționar al ecuației Navier-Stokes liniarizată. $\vec{u}$ reprezintă viteza de scurgere iar p presiunea. μ este un număr real pozitiv, coeficientul de vâscozitate.

Introducem spațiul

$$V = \{ \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^2 : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \}.$$

V este un subspațiu închis al lui $(H_0^1(\Omega))^2$ și prin urmare este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar indus.

Vom considera următoarea formulare variațională a lui (3.16): găsiți $\vec{u} \in V$ astfel ca

$$(3.17) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i dx, \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Definiția 3.3.1 *O funcție $\vec{u} \in V$ este soluție slabă a lui (3.16) dacă verifică (3.17) pentru orice $\vec{v} \in V$.*

Existența și unicitatea soluției slabe a lui (3.16) se obțin ușor folosind teorema Lax-Milgram.

Teorema 3.3.1 *Sistemul (3.16) are o soluție slabă unică, $\vec{u} \in V$.*

Demonstrație: Definim în V forma biliniară

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx$$

și forma liniară

$$L(\vec{v}) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

Se arată cu ușurință că a este biliniară, continuă și simetrică iar L este liniară și continuă. Coercivitatea lui a se obține, de asemenea, cu ușurință, folosind inegalitatea Poincaré din teorema 2.3.2.

Prin urmare, sunt îndeplinite condițiile din teorema Lax-Milgram și (3.17) are o soluție $\vec{u} \in V$ unică. ■

Este mai dificil să vedem în ce sens soluția lui (3.17) verifică ecuația (3.16). Pentru acest lucru avem nevoie de următorul rezultat care poate fi găsit în [12] și [25].

Propoziția 3.3.1 *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ este un deschis conex 1-regulat și $\mathcal{L}$ este o formă liniară și continuă pe $(H_0^1(\Omega))^2$ atunci $\mathcal{L} = 0$ în V dacă și numai dacă există $\varphi \in L^2(\Omega)$ astfel ca*

$$(3.18) \quad \mathcal{L}(\vec{v}) = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \vec{v} dx, \quad \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^2.$$

Cu ajutorul proprietății 3.3.1 putem demonstra următorul rezultat.

Teorema 3.3.2 *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ este un deschis conex 1-regulat, există o funcție unică $\vec{u} \in V$ și există $p \in L^2(\Omega)$, unică cu excepția unei constante aditive, astfel încât*

$$(3.19) \quad a(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx = L(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^2.$$

În plus, funcția $\vec{u}$ este soluția lui (3.17).

Demonstrație: Dacă $\vec{u} \in V$ este soluția lui (3.17), definim aplicația

$$\vec{v} \longrightarrow \mathcal{L}(\vec{v}) = a(\vec{u}, \vec{v}) - L(\vec{v}).$$

$\mathcal{L}$ este o aplicație liniară și continuă pe $(H_0^1(\Omega))^2$ cu proprietatea că $\mathcal{L} = 0$ în V . Conform proprietății 3.3.1 există $p \in L^2(\Omega)$, unică exceptând o constantă aditivă, astfel încât

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx.$$

Se obține că $(\vec{u}, p)$ este soluția lui (3.19) și demonstrația se încheie. ■

Am obținut astfel că soluția $(\vec{u}, p)$ a lui (3.19) verifică (3.16) în sensul distribuțiilor în Ω . Dacă $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2$, atunci $p \in H^1(\Omega)$ și ecuația (3.16) se verifică în $L^2(\Omega)$.

3.4 Sistemul elasticității

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un deschis 1-regulat, Γ_0 o parte a frontierei $\partial\Omega$ de măsură strict pozitivă și $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Dacă $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ este o funcție vectorială definită în Ω și cu valori în $\mathbb{R}^3$, definim

$$\epsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

$$\sigma_{ij}(\vec{v}) = \lambda \left(\sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk}(\vec{v}) \right) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(\vec{v}), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

unde $\lambda \geq 0$ și $\mu > 0$ sunt două constante reale.

Conșierăm acum următoarea problemă a elasticității tridimensionale: dată $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \in (L^2(\Omega))^3$, găsiți $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, soluție a sistemului

$$(3.20) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{u}) + f_i = 0 & \text{în } \Omega, 1 \leq i \leq 3 \\ u_i = 0 & \text{pe } \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) \nu_j = 0 & \text{pe } \Gamma_1 \end{cases}$$

Ecuațiile (3.20) descriu deformațiile mici $\vec{u}$ ale unui solid Ω elastic, omogen și izotrop, asupra căruia acționează o forță exterioară $\vec{f}$. Solidul este fixat în Γ_0 și liber în Γ_1 . σ_{ij} este tensorul de constrângere, ϵ_{ij} este tensorul deformărilor liniare iar constantele μ și λ sunt coeficienții Lamé.

Pentru formularea variațională a problemei (3.20), definim spațiul

$$V = \{\vec{v} \in (H^1(\Omega))^3 : \vec{v} = 0 \text{ pe } \Gamma_0\}$$

și normele

$$\|\vec{v}\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\vec{v}\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Următorul rezultat este similar inegalității lui Poincaré și are la bază inegalitatea lui Korn.

Teorema 3.4.1 *Dacă Ω este un deschis 1-regulat din $\mathbb{R}^N$, există o constantă pozitivă C astfel încât*

$$(3.21) \quad \sum_{i,j=1}^3 \|\epsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \geq C \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Demonstrație: A se vedea [20]. ■

Introducem acum forma biliniară $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx$$

și forma liniară $L : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(\vec{v}) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i f_i dx.$$

Avem următorul rezultat.

Teorema 3.4.2 *Există un unic $\vec{u} \in V$ care verifică egalitatea variațională*

$$(3.22) \quad a(\vec{u}, \vec{v}) = L(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Demonstrație: Se arată cu ușurință că a este biliniară, simetrică și continuă iar L este liniară și continuă. Mai mult, folosind teorema 3.4.1, deducem imediat că a este și coercivă. Concluzia se obține folosind teorema Lax-Milgram. ■

Folosind faptul că forma biliniară a este simetrică, putem obține soluția $\vec{u}$ a lui (3.22) prin minimizarea funcționalei

$$(3.23) \quad J(\vec{v}) = \frac{1}{2}a(\vec{v}, \vec{v}) - L(\vec{v})$$

și avem că

$$(3.24) \quad J(\vec{u}) = \min_{\vec{v} \in V} J(\vec{v}).$$

Definiția 3.4.1 *Soluția $\vec{u}$ a problemei (3.22) se numește soluție slabă a sistemului (3.20).*

Să vedem în continuare în ce sens verifică soluția slabă $\vec{u}$ sistemul inițial (3.20). Ținând cont de simetria tensorului σ_{ij} , obținem că

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx.$$

Acum, alegând $\vec{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$, deducem din (3.22) că

$$(3.25) \quad - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{u}) = f_i, \text{ în } \Omega, \quad 1 \leq i \leq 3$$

în sensul distribuțiilor. Dacă $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^3$, atunci (3.25) se verifică în $L^2(\Omega)$.

În ceea ce privește satisfacerea condițiilor pe frontieră, să notăm că pe Γ_0 ele se verifică în sensul urmei pentru că $\vec{u} \in V$. Condițiile pe Γ_1 se găsesc implicit în formularea variațională (3.22). Pentru a vedea acest lucru, este suficient să considerăm că $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^3$ și să aplicăm formula lui Green în egalitatea (3.22). Obținem că

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_1} \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) \nu_j \right) v_i d\sigma = 0, \quad \forall \vec{v} \in V$$

și prin urmare

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) \nu_j = 0, \text{ pe } \Gamma_1, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Observația 3.4.1 Formularea variațională (3.22) are o interpretare fizică importantă. Astfel, V este spațiul deformărilor $\vec{v}$ admisibile iar (3.22) exprimă principiul lucrului virtual: dacă $\vec{v} \in V$ este o deformare admisibilă, atunci lucrul mecanic de deformare a solidului elastic,

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx,$$

este egal cu lucrul mecanic al forțelor externe,

$$L(\vec{v}) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i f_i dx.$$

Deformarea reală $\vec{u}$ se obține ca cea deformare pentru care cele două lucruri mecanice sunt egale, adică este verificată (3.22).

Formulare (3.24) exprimă faptul că deformarea reală este cea deformare admisibilă (din V) care minimizează energia potențială J . Remarcați că J este compusă dintr-o parte corespunzătoare energiei de deformare,

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{v}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx$$

și o parte corespunzătoare energiei forțelor exterioare,

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i f_i dx.$$

3.5 Ecuația plăcilor

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis mărginit de frontieră 2-regulată. Dată o funcție $f \in L^2(\Omega)$, vom considera următoarea ecuație în Ω :

$$(3.26) \quad \begin{cases} -\Delta^2 u = f & \text{în } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ecuația (3.26) descrie poziția de echilibru u a unei plăci subțiri (sau a unei bare dacă $N = 1$) aflată sub acțiunea unei forțe distribuite f și care are frontiera încastrată. Să observăm că din punct de vedere matematic, dacă ecuațiile studiate până acum au avut cel mult două derivate, în (3.26) apare un operator de derivare de ordin patru,

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x_i \partial^2 x_j}.$$

De asemenea, să observăm cele două condiții pe frontieră care corespund unei plăci încastrate și care afectează poziția u și derivata normală pe frontieră a lui u . Alte posibile condiții pe frontieră sunt

$$(3.27) \quad u = \Delta u = 0$$

care corespund unei plăci simplu sprijinite (vezi exercițiul 3).

Studiul soluțiilor problemei (3.26) va cunoaște același demers ca în cazurile precedente. Definim spațiul

$$V = \{v \in H^2(\Omega) : v = 0, \partial v / \partial \nu = 0 \text{ pe } \partial \Omega\}.$$

Acest spațiu va fi notat prin $H_0^2(\Omega)$. Să observăm că ambele condiții pe frontieră au sens, datorită teoremei de urmă 2.6.2.

Vom defini în V forma biliniară a și forma liniară L prin

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Se poate vedea ușor că a este biliniară, simetrică și continuă în V iar L este, de asemenea, liniară și continuă în V . Pentru a putea rezolva problema variațională coresunzătoare lui (3.26), vom avea nevoie de următoarea inegalitate

Teorema 3.5.1 *Dacă Ω este un deschis 1-regulat din $\mathbb{R}^N$, atunci există o constantă pozitivă C astfel încât*

$$(3.28) \quad \|v\|_{2,\Omega}^2 \leq C \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Demonstrație: Este suficient să demonstrăm (3.28) pentru funcții $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, deoarece $\mathcal{D}(\Omega)$ este dens în $H_0^2(\Omega)$. Folosind formula lui Green deducem că, pentru orice $v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial^3 v}{\partial x_i^2 \partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} dx.$$

În acest fel am demonstrat că

$$|v|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx$$

și rezultatul decurge din inegalitatea dată de corolarul 2.7.4. ■

Asociem problemei (3.26) următoarea problemă variațională:

$$(3.29) \quad a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V$$

și avem următorul rezultat

Teorema 3.5.2 *Există o unică soluție $u \in V$ a problemei (3.29).*

Demonstrație: Ținând cont de proprietățile lui a și L , este o consecință imediată a teoremei Lax-Milgram. ■

Definiția 3.5.1 *Soluția $u \in V$ a problemei (3.26) se numește soluție slabă a ecuației (3.26).*

3.6 Exerciții

1. Pentru fiecare din exemplele de mai jos, găsiți formularea variațională corespunzătoare și demonstrați existența și unicitatea soluției slabe:

$$(a) \quad \begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = x & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

unde a este o funcție din $L^2(0, 1)$, cu $a(x) \geq 0$ a.p.t. în $(0, 1)$.

$$(b) \quad \begin{cases} -u''(x) = x(1+x) & x \in (0, 1) \\ u(0) = a, \quad u'(1) = b \end{cases}$$

unde a și b sunt două numere reale.

$$(c) \quad \begin{cases} -u''(x) + au(x) = f(x) & x \in (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și a este un număr real pozitiv. Ce se întâmplă dacă $a = 0$?

$$(d) \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) = x & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} -u''(x) + u'(x) + u(x) = x^2 & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} -(bu')'(x) + a(x)u(x) = f(x) & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

unde $b \in \mathcal{C}[0, 1]$, $a \in L^2(0, 1)$ și $f \in L^2(0, 1)$ cu $b(x) > \mu > 0$ și $a(x) \geq 0$ a.p.t. în $(0, 1)$.

2. Pentru fiecare din exemplele de mai jos, găsiți formularea variațională corespunzătoare și demonstrați existența și unicitatea soluției slabe:

$$(a) \begin{cases} -\Delta u(x, y) + u(x, y) = x^2 + y^2 & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(1, y) = 0 & y \in (0, 1) \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} -\Delta u(x, y) + u(x, y) = x + y + 1 & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u_x(0, y) = y, \quad u(1, y) = y, & y \in (0, 1) \\ u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 1) = x & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -\operatorname{div}(\vec{a} \cdot \nabla u)(x, y) + u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u_x(0, y) = u(1, y) = 0, & y \in (0, 1) \\ u(x, 0) = u_y(x, 1) = 0 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

unde $\vec{a}(x, y) = (1 + x^2, 1 + y^2)$ iar $f \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$.

3. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis mărginit de frontieră 2-regulată. Dată o funcție $f \in L^2(\Omega)$, vom considera următoarea ecuație în Ω :

$$\begin{cases} -\Delta^2 u = f & \text{în } \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Găsiți formularea variațională corespunzătoare problemei de mai sus și demonstrați existența și unicitatea soluției slabe.

4. (Inegalități variaționale) În condițiile teoremei 3.1.2 fie $U \subset V$ o mulțime convexă și închisă.

(a) Demonstrați că funcționala $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ are în U un minim care se atinge în $u \in U$.

(b) Elementul $u \in U$ găsit la punctul precedent verifică

$$a(u, v - u) \geq f(v - u), \quad \forall v \in V.$$

(c) Reciproc, orice u care verifică inegalitatea de la punctul precedent, este un minimizator al lui J în U .

Capitolul 4

Aproximarea problemelor variaționale

În capitolul 3 am studiat problema variațională următoare: dat un spațiu Hilbert V , găsiți $u \in V$ astfel încât

$$(4.1) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V.$$

Dacă a este o formă biliniară, continuă și coercivă iar L este o formă liniară și continuă în V , teorema Lax-Milgram asigură existența și unicitatea soluției $u \in V$ a problemei (4.1).

În acest capitol vom presupune îndeplinite condițiile din teorema Lax-Milgram (a este o formă biliniară, continuă și coercivă iar L este o formă liniară și continuă în V) și ne vom propune să descriem o metodă generală care are drept scop obținerea de aproximații ale soluției u a lui (4.1). Unul dintre cazurile particulare ale procedurii general descrise va fi chiar metoda elementului finit. Aceasta va fi prezentată pe un exemplu simplu în acest capitol și într-un cadru mult mai general în capitolul 6.

4.1 Descrierea metodei de aproximare

Fie V un spațiu Hilbert. Considerăm un șir de spații vectoriale $(V_h)_{h>0}$ cu următoarele proprietăți:

- Pentru orice $h > 0$, V_h este un subspațiu vectorial al lui V ,

$$V_h \subset V.$$

- Pentru orice $h > 0$, V_h este de dimensiune finită,

$$\dim(V_h) = I_h < \infty.$$

Observația 4.1.1 *Deși parametrul h după care se indexează spațiile V_h ia inițial valori în $(0, \infty)$, în practică el parcurge valorile discrete ale unui șir descrescător de numere reale care tinde la zero. $\square$*

Vom considera că dimensiunea spațiului V este infinită

$$(4.2) \quad \dim(V) = \infty.$$

Gândindu-ne la aplicațiile pe care le-am prezentat în capitolul 3 provenite din ecuații cu derivate parțiale, cerința (4.2) apare ca naturală, deoarece acolo V este un spațiu de funcții de tipul $H^1(\Omega)$ sau $H_0^1(\Omega)$ care sunt de dimensiune infinită.

Spațiile V_h sunt gândite ca fiind “aproximații de dimensiune finită” ale spațiului de dimensiune infinită V . Deși în acest moment afirmația are doar un caracter intuitiv, apare ca logică cerința ca dimensiunile spațiilor V_h să se apropie de cea a lui V când h tinde la zero. De aceea vom considera că

$$(4.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} I_h = \infty.$$

Introducem o problemă similară cu (4.1), dar formulată în spațiul V_h : găsiți $u_h \in V_h$ astfel încât

$$(4.4) \quad a(u_h, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Spațiul V_h , fiind un subspațiu de dimensiune finită al lui V , este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar din V . Prin urmare, teorema Lax-Milgram asigură existența și unicitatea soluției $u_h \in V_h$ a problemei (4.4). Vom oferi însă o nouă demonstrație a existenței soluției care are un caracter constructiv și care arată avantajele considerării unei probleme într-un spațiu de dimensiune finită.

Teorema 4.1.1 *Dacă $V_h \subset V$ este un subspațiu de dimensiune finită I_h al lui V , problema (4.4) are o soluție unică $u_h \in V_h$.*

Demonstrație: Fie $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{I_h}\}$ o bază a spațiului V_h . Căutăm soluția problemei (4.4) de forma

$$(4.5) \quad u_h = \sum_{j=1}^{I_h} u_h^j \varphi_j,$$

unde $(u_h^j)_{1 \leq j \leq I_h}$ sunt coeficienții lui u_h în baza $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq I_h}$.

Folosind expresia (4.5) și linearitatea lui a , din (4.4) rezultă că

$$\sum_{j=1}^{I_h} u_h^j a(\varphi_j, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Dacă scriem funcția test sub forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{I_h} \alpha^i \varphi_i,$$

obținem că existența și unicitatea lui u_h este echivalentă cu existența și unicitatea scalarilor $(u_h^j)_{1 \leq j \leq I_h}$ care verifică

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^{I_h} \alpha^i \left(\sum_{j=1}^{I_h} u_h^j a(\varphi_j, \varphi_i) - L(\varphi_i) \right) = 0,$$

pentru orice alegere a lui $(\alpha^i)_{1 \leq i \leq I_h}$.

Din (4.6) obținem că u_h de forma (4.5) este soluție a lui (4.4) dacă și numai dacă

$$(4.7) \quad \sum_{j=1}^{I_h} u_h^j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq I_h.$$

Fie R matricea pătratică de dimensiune I_h de elemente $R_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, F vectorul de dimensiune I_h de elemente $F_i = L(\varphi_i)$ și U vectorul de dimensiune I_h de elemente $U_j = u_h^j$. Relațiile (4.7) se scriu sub forma matriceală echivalentă

$$(4.8) \quad RU = F.$$

Determinarea soluției u_h este echivalentă cu rezolvarea sistemului de ecuații algebrice liniare (4.8). Pentru demonstrarea existenței și unicității soluției sistemului (4.8) să observăm că matricea R este definită pozitiv. Intr-adevăr, dacă $V = (v^j)_{1 \leq j \leq I_h} \in \mathbb{R}^{I_h}$ este un vector arbitrar atunci, folosind proprietatea de coercivitate a lui a , obținem că

$$\begin{aligned} V^t R V &= \sum_{i=1}^{I_h} \sum_{j=1}^{I_h} a(\varphi_j, \varphi_i) v^i v^j = a \left(\sum_{j=1}^{I_h} v^j \varphi_j, \sum_{i=1}^{I_h} v^i \varphi_i \right) \geq \\ &\geq \mu \left\| \sum_{j=1}^{I_h} v^j \varphi_j \right\| \left\| \sum_{i=1}^{I_h} v^i \varphi_i \right\|. \end{aligned}$$

Prin urmare $V^t R V \geq 0$ și $V^t R V = 0$ dacă și numai dacă $\sum_{i=1}^{I_h} v^i \varphi_i = 0$ ceea ce este echivalent cu $V = 0$. Proprietatea de pozitivă definire a lui R este astfel demonstrată.

Sistemul (4.8), având o matrice R definită pozitiv, are o soluție unică $U \in \mathbb{R}^{I_h}$. Prin urmare (4.4) are o soluție unică u_h dată de (4.5).

Să observăm, de asemenea, că dacă forma biliniară a are și proprietatea de simetrie atunci matricea R este, de asemenea, simetrică. ■

După cum reiese din demonstrația teoremei 4.1.1, odată fixată o bază $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{I_h}\}$ în V_h , găsirea soluției problemei (4.4) este echivalentă cu rezolvarea sistemului (4.8) de ecuații liniare de dimensiune I_h . Matricea R a sistemului se mai numește și **matrice de rigiditate**.

Obiectivul nostru este acela de a aproxima soluția u a problemei (4.1) prin soluția u_h a problemei (4.4) atunci când h tinde la zero. Pentru aceasta va trebui să alegem spațiile V_h astfel încât să se asigure convergența dar și să se poată determina cât mai ușor posibil soluția u_h .

Observația 4.1.2 *Matricea de rigiditate a sistemului (4.8) este în multe cazuri simetrică și definită pozitiv. Există numeroase metode numerice performante de rezolvare a sistemelor liniare care iau în considerare proprietățile speciale de simetrie și definire pozitivă ale matricii sistemului. Dintre acestea amintim metoda Cholesky (metodă directă) și metoda gradientului conjugat (metodă iterativă). Aceste metode au fost introduse tocmai din necesitatea de a rezolva sisteme cu asemenea caracteristici care rezultau din discretizarea (nu numai prin elemente finite ci și prin diferențe finite) a ecuațiilor cu derivate parțiale.*

Dificultatea fundamentală în ceea ce privește rezolvarea sistemului (4.8) constă în faptul că dimensiunea acestuia I_h devine din ce în ce mai mare când h tinde la zero. Numai cu un h mic putem spera la o aproximare satisfăcătoare a soluției lui (4.1). Prin urmare, pentru obținerea unor rezultate numerice din ce în ce mai bune, volumul de memorie și timpul de calcul necesare vor fi din ce în ce mai mari.

De aceea, unul dintre obiectivele cele mai importante ale metodei este acela de a asigura obținerea unui sistem cât mai ușor de rezolvat. Acest lucru se realizează dacă, de exemplu, matricea sistemului are foarte multe elemente nule (matrice rară). Metoda elementului finit este astfel concepută încât să asigure această cerință în cele mai diverse situații care apar în practică, adică pentru orice fel de ecuație, domeniu, etc. □

Observația 4.1.3 Alegerea spațiilor V_h trebuie să se facă în așa fel încât să se asigure convergența metodei, adică

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Aceasta este cerința fundamentală a metodei prezentate. În plus, se urmărește asigurarea unei viteze de convergență cât mai mari posibil. Este de așteptat ca obținerea unei viteze mari de convergență să se facă pe baza creșterii complexității sistemului de ecuații liniare corespunzător. Experiența programatorului și datele concrete ale problemei de rezolvat vor dicta raportul dintre cele două aspecte și vor stabili alegerea cât mai aproape de optim. În general se evită obținerea unor sisteme foarte complicate, fiind mai eficientă rezolvarea unor sisteme mari cu câteva elemente nenule decât rezolvarea unor sisteme mai mici dar cu multe astfel de elemente. $\square$

Observația 4.1.4 Spațiile V_h sunt determinate de o bază a lor. Este foarte important ca funcțiile din bază să se construiască cât mai ușor și într-un mod canonic. $\square$

Am descris în această secțiune un procedeu general de aproximare a soluției problemei (4.1) care presupune următoarele etape:

- Se consideră problema (4.4) pe un subspațiu $V_h \subset V$ de dimensiune finită I_h .
- Prin fixarea unei baze $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{I_h}\}$ în V_h , se reduce găsirea soluției noii probleme la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare de tipul (4.8).
- Se rezolvă sistemul de ecuații algebrice liniare (4.8) și se obține soluția u_h a lui (4.4).
- Se aproximează soluția u a lui (4.1) prin soluția u_h a lui (4.4)

Conform observațiilor 4.1.2-4.1.4, pentru o cât mai bună și eficientă aproximare prin metoda descrisă mai sus este necesar să se țină cont de următoarele cerințe:

1. Spațiile de aproximare V_h și (în mod echivalent) bazele $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{I_h}\}$ trebuie să fie cât mai ușor de determinat și într-un mod cât mai general cu putință.

2. Să se asigure convergența metodei, cu o rapiditate cât mai mare.
3. Să se asigure obținerea unor sisteme liniare (4.8) cât mai ușor de rezolvat.

Toate cerințele de mai sus vor fi satisfăcute într-o măsură mai mică sau mai mare în funcție de alegerea spațiilor V_h și a bazelor lor. Bineînțeles că nu dispunem de o alegere care să îndeplinească simultan toate cerințele. Succesul metodei elementului finit se bazează tocmai pe o alegere specială a spațiilor V_h , care asigură satisfacerea într-o măsură semnificativă a cerințelor de mai sus.

4.2 Două exemple de discretizări

În această secțiune vom considera următorul caz particular al problemei (4.1)

$$V = H_0^1(0, 1),$$

$$a(u, \varphi) = \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx, \quad L(\varphi) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in V,$$

unde $f \in L^2(0, 1)$. Problema variațională corespunzătoare

$$(4.9) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V$$

are o soluție unică $u \in V$.

Vom propune două discretizări diferite pentru aproximarea lui u și le vom comenta din punctul de vedere al observațiilor de mai sus.

1. Fie $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N}$. Definim $\varphi_n(x) = x^n(1-x)^n$ și spațiul

$$V_h = \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}.$$

Se poate vedea imediat că $V_h \subset V$ și $\dim(V_h) = I_h = N$.

Cu această alegere, există o singură soluție $u_h \in V_h$ a problemei

$$(4.10) \quad a(u_h, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Ea se determină după formula

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_h^j \varphi_j$$

unde $U = (u_h^j)_{1 \leq j \leq N}$ este soluția unui sistem de ecuații liniare a cărui matrice este R , de elemente

$$R_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 [x^j(1-x)^j]' [x^i(1-x)^i]' dx.$$

Avem că

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \int_0^1 [x^j(1-x)^j]' [x^i(1-x)^i]' dx = \\ &= \int_0^1 j i [x^{j-1}(1-x)^j + x^j(1-x)^{j-1}] [x^{i-1}(1-x)^i + x^i(1-x)^{i-1}] dx = \\ &= j i \int_0^1 x^{j-1}(1-x)^{j-1} x^{i-1}(1-x)^i dx = j i \int_0^1 x^{j+i-2} (1-x)^{j+i-2} dx = \\ &= \frac{j i (j+i-2)!}{(j+i-1)(j+i) \dots (2j+2i-3)}. \end{aligned}$$

Principalul neajuns al acestei alegeri este faptul că matricea R nu are nici un element egal cu zero. Acest lucru face rezolvarea sistemului corespunzător extrem de dificilă atunci când dimensiunea lui devine mare. În plus, vor apare și probleme legate de proasta condiționare numerică a unui astfel de sistem, ceea ce va face ca rezultatele numerice să nu fie satisfăcătoare pentru o valoare mare a lui N .

2. Fie $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N}$. Definim $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)$ și spațiul

$$V_h = \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}.$$

Se poate vedea imediat că $V_h \subset V$ și $\dim(V_h) = I_h = N$.

Cu această alegere, există o singură soluție a problemei (4.10), $u_h \in V_h$, care se determină după formula

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_h^j \varphi_j$$

unde $U = (u_h^j)_{1 \leq j \leq N}$ este soluția unui sistem de ecuații liniare a cărui matrice este R , de elemente

$$R_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 [\sin(j\pi x)]' [\sin(i\pi x)]' dx = \frac{j^2 \pi^2}{2} \delta_{ij}.$$

Matricea sistemului este în acest caz diagonală iar rezolvarea lui este trivială. Prin urmare, această alegere este optimă din punctul de vedere al rezolvării sistemului.

Trebuie însă remarcat faptul că, în acest caz, funcțiile φ_i din bază sunt funcțiile proprii ale operatorului Laplace, care se determină explicit. Dacă însă vom considera o ecuație diferită, de exemplu cu coeficienți variabili sau într-un domeniu multidimensional neregulat, va fi imposibilă găsirea explicită a unor astfel de funcții. Prin urmare, acest exemplu nu este generalizabil și rămâne doar de interes academic.

Metoda elementului finit va realiza ambele deziderate care lipsesc celor două exemple de discretizare de mai sus. În primul rând va determina un sistem de ecuații liniare cu foarte multe elemente nule, ceea ce va face mult mai ușoară rezolvarea lui. În al doilea rând, construcția bazei și a spațiului de aproximare V_h va fi una foarte generală, putându-se realiza în cele mai diverse situații.

4.3 Convergența metodei de aproximare

În această secțiune vom enunța și demonstra un criteriu de convergență care stă la baza tuturor rezultatelor de convergență a metodei elementului finit.

Fie $u \in V$ soluția problemei (4.1) și $u_h \in V_h$ soluția problemei (4.4). Cum obiectivul nostru este acela de a aproxima u prin u_h , definim eroarea

$$(4.11) \quad e_h = u - u_h \in V$$

și ne propunem să dăm estimări ale normei lui e_h în V . Vom începe cu următorul rezultat

Teorema 4.3.1 *Dacă $u \in V$ este soluția problemei (4.1) și $u_h \in V_h$ este soluția problemei (4.4) atunci*

1. $a(e_h, \varphi) = 0, \forall \varphi \in V_h$
2. $a(e_h, e_h) \leq a(u - \varphi, u - \varphi), \forall \varphi \in V_h$
3. $a(u - u_h, u - u_h) = \min_{\varphi \in V_h} a(u - \varphi, u - \varphi).$

Demonstrație:

1. Cum $u \in V$ este soluția problemei (4.1) iar $u_h \in V_h$ este soluția problemei (4.4) avem că

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad a(u_h, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Scăzând cele două relații se obține rezultatul dorit.

2. Fie $\varphi \in V_h$. Avem că

$$\begin{aligned} a(u - \varphi, u - \varphi) &= a(e_h + u_h - \varphi, e_h + u_h - \varphi) = \\ &= a(e_h, e_h) + a(u_h - \varphi, u_h - \varphi) + 2a(e_h, u_h - \varphi). \end{aligned}$$

Cum $u_h - \varphi \in V_h$, ținând cont de punctul precedent, rezultă că

$$\begin{aligned} a(u - \varphi, u - \varphi) &= a(e_h, e_h) + a(u_h - \varphi, u_h - \varphi) \geq \\ &\geq a(e_h, e_h) + \mu \|u_h - \varphi\|^2 \geq a(e_h, e_h). \end{aligned}$$

3. Rezultă imediat din punctul precedent ținând cont că $u_h \in V_h$. ■

Observația 4.3.1 *Presupunând că $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este, în plus, simetrică, ea definește un produs scalar în V . Din proprietățile de continuitate și coercivitate ale lui a deducem că acest nou produs scalar este echivalent cu cel inițial din V . Rezultatele din teorema 4.3.1 se pot interpreta acum în următorul fel: u_h este proiecția lui u pe spațiul V_h în raport cu produsul scalar definit de a . Prin urmare, u_h este elementul de cea mai bună aproximație a lui u în V_h în raport cu norma dată de a . Ori acest lucru este exact ceea ce exprimă punctul 3) din teorema 4.3.1. □*

Următorul rezultat este acum o consecință imediată a estimărilor din teorema 4.3.1.

Teorema 4.3.2 (Cea) *Dacă $e_h = u - u_h$ este eroarea comisă prin aproximarea lui u cu u_h , atunci există o constantă $C > 0$, independentă de h , astfel încât*

$$(4.12) \quad \|e_h\| \leq C \inf_{\varphi \in V_h} \|u - \varphi\|.$$

Demonstrație: Dacă $\varphi \in V_h$ fie $w_h = \varphi - u_h \in V_h$. Avem că

$$a(u - u_h, w_h) = 0$$

și prin urmare

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - \varphi).$$

Deducem că

$$\mu \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - \varphi) \leq M \|u - u_h\| \|u - \varphi\|$$

de unde rezultă (4.12) cu $C = M/\mu$. ■

Observația 4.3.2 *Estimația (4.12), deși extrem de ușor de obținut, are o semnificație de o mare importanță. Astfel, pentru o estimare a erorii e_h este suficientă măsurarea diferenței $u - \varphi$, unde φ este un element din V_h . În cazul metodei elementului finit, acest element φ va fi construit prin interpolare, mai precis va fi interpolatul lui u în V_h . Cotele pentru eroare se vor obține atunci prin estimarea diferenței dintre u și interpolatul său. □*

Observația 4.3.3 *Dacă a este în plus simetrică, ea definește un produs scalar în V echivalent cu cel inițial și*

$$\sqrt{\mu} \|w\| \leq \sqrt{a(w, w)} \leq \sqrt{M} \|w\|, \quad \forall w \in V.$$

Acum, din punctul 2. al teoremei 4.3.1 rezultă că

$$\sqrt{\mu} \|e_h\| \leq \sqrt{a(e_h, e_h)} \leq \sqrt{a(u - \varphi, u - \varphi)} \leq \sqrt{M} \|u - \varphi\|.$$

Se obține din nou estimația (4.12) cu constanta $C = \sqrt{\frac{M}{\mu}}$. □

Vom da în continuare o condiție generală care asigură convergența metodei de aproximare. Ea este legată de proprietatea de “bună aproximare a lui V ” pe care trebuie să o aibă spațiile V_h .

Definiția 4.3.1 *Vom spune că șirul $(V_h)_{h>0}$ este o **aproximare internă** a lui V dacă*

1. *Pentru orice $h > 0$, $V_h \subseteq V$ este un subspațiu al lui V de dimensiune finită.*

2. Pentru orice $\varphi \in V$ și $h > 0$ există $\varphi_h \in V_h$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi - \varphi_h\| = 0.$$

Remarcați că definiția de mai sus arată că elementele din V se pot aproxima din ce în ce mai bine prin elementele spațiilor V_h . În aceste condiții avem următoarea teoremă de convergență.

Teorema 4.3.3 *Dacă $(V_h)_{h>0}$ este o aproximare internă a spațiului V , u este soluția problemei (4.1) în V și u_h este soluția problemei (4.4) în V_h atunci*

$$(4.13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Demonstrație: Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din proprietatea de aproximare a spațiilor $(V_h)_{h>0}$ rezultă că, pentru fiecare $h > 0$ există $v_h \in V_h$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - v_h\| = 0.$$

Așadar, există $h_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că, pentru orice $h < h_\varepsilon$,

$$\|u - v_h\| < \frac{\varepsilon}{C}$$

unde C este constanta din teorema 4.3.2.

Din teorema 4.3.2 avem că, pentru fiecare $h < h_\varepsilon$,

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{\varphi \in V_h} \|u - \varphi\| \leq C \|u - v_h\| < \varepsilon.$$

Convergența (4.13) a fost astfel demonstrată. ■

Observația 4.3.4 *Concluzia teoremei ramâne adevărată dacă se înlocuiește condiția 2) din definiția aproximației interne a lui V cu condiția echivalentă*

2'. *Există un subspațiu $\mathcal{V}$ dens în V astfel încât, pentru orice $v \in \mathcal{V}$ și $h > 0$, există $v_h \in V_h$ cu proprietatea că*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\| = 0.$$

Evident 2) implică 2'). Pentru cealaltă implicație, fie $\varepsilon > 0$ și $\varphi \in V$. Rezultă că există $v \in \mathcal{V}$ astfel încât

$$(4.14) \quad \|\varphi - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pe de altă parte, din proprietatea de aproximare a elementelor din $\mathcal{V}$, există un şir $(v_h)_{h>0}$ astfel încât $v_h \in V_h$ pentru orice h şi $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\| = 0$. Rezultă că, pentru h suficient de mic,

$$(4.15) \quad \|v - v_h\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinând (4.14) şi (4.15) obţinem că

$$(4.16) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi - v_h\| = 0.$$

Prin urmare, am demonstrat că 2) este echivalentă cu 2').

Condiţia 2') este utilă deoarece, pentru anumite elemente din $v \in V$ (dar nu pentru toate), este uşor de demonstrat existenţa unor $v_h \in V_h$ astfel încât

$$\|v - v_h\| = o(h)$$

unde $o(h)$ este o funcţie de h cu proprietatea că $\lim_{h \rightarrow 0} o(h) = 0$. $\square$

4.4 Metoda Galerkin

Vom da un exemplu în care condiţia de aproximare internă este verificată şi prin urmare şirul aproximaţiilor $(u_h)_{h>0}$ converge la u .

Presupunem că V este un spaţiu Hilbert separabil. În acest caz există o bază ortonormată cel mult numărabilă $(v_i)_{i \geq 1}$ a lui V (vezi [4]). Reamintim că

Definiţia 4.4.1 $(v_i)_{i \geq 1} \subset V$ se numeşte **bază ortonormată a lui V** dacă

1. $\text{Span}(v_i)_{i \geq 1} = V$ ($(v_i)_{i \geq 1}$ este totală).
2. $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j \geq 1$ ($(v_i)_{i \geq 1}$ este ortonormală).

Pentru fiecare $h > 0$ alegem $N = \lceil \frac{1}{h} \rceil$ şi fie

$$(4.17) \quad V_h = \text{Span}\{v_1, \dots, v_N\}.$$

Şirul $(V_h)_{h>0}$ este în acest caz o aproximare internă a lui V .

Într-adevăr, $V_h \subset V$ are dimensiune finită. Pentru verificarea celei de-a doua condiţii din definiţia aproximării interne fie $\varphi \in V$ şi $h > 0$. Definim

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^N (\varphi, v_i) v_i \in V_h.$$

Deoarece $(v_i)_{i \geq 1}$ este o bază ortonormală a lui V , avem că ([4], p...)

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, v_i) v_i, \quad \|\varphi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi, v_i)|^2 < \infty.$$

Rezultă că

$$\|\varphi - \varphi_h\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} |(\varphi, v_i)|^2$$

și cum ultimul termen tinde la zero când N tinde la infinit, a doua condiție din definiția aproximării interne se verifică.

Fie u soluția problemei (4.1) în V și u_h este soluția problemei (4.4) în V_h dat de (4.17). Din teorema 4.3.3 obținem că,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0$$

și prin urmare metoda converge.

În literatură, alegerea (4.17) a spațiilor V_h și considerarea aproximării corespunzătoare u_h este cunoscută sub numele de metoda Galerkin. Ea are o mare utilitate teoretică fiind folosită la demonstrarea a numeroase rezultate de existență a soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale. Din punct de vedere practic, utilitatea ei este limitată de imposibilitatea construirii explicite a unei baze ortonormate a lui V .

Multe lucrări de specialitate (îndeosebi cu caracter numeric) numesc metodă de tip Galerkin orice metodă de aproximare a lui u prin u_h , unde u_h este soluția unei probleme de tip (4.4), pe un spațiu V_h de dimensiune finită. În acest context, metoda elementului finit devine o metodă de tip Galerkin.

4.5 Discretizare prin metoda elementului finit

În această secțiune vom oferi cel mai simplu exemplu de discretizare folosind metoda elementului finit. Pentru aceasta, vom considera următorul caz particular al problemei (4.1):

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(0, 1), \\ a(u, \varphi) &= \int_0^1 p(x) u'(x) \varphi'(x) dx + \int_0^1 q(x) u(x) \varphi(x) dx, \\ L(\varphi) &= \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in V \end{aligned}$$

unde $f \in L^2(0, 1)$, $p, q \in L^\infty(0, 1)$ cu $p(x) \geq p_0 > 0$ și $q(x) \geq 0$ a.p.t în $(0, 1)$.

Problema variațională corespunzătoare,

$$(4.18) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V,$$

are o soluție unică $u \in V$.

4.5.1 Construirea aproximațiilor

Vom determina aproximarea u_h a lui u în cazul problemei (4.18), folosind metoda elementului finit. Fie $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N+1}$. Împărțim intervalul $[0, 1]$ în $N + 1$ părți egale $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ prin punctele $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N + 1$. Am realizat în acest fel o partiție a lui $[0, 1]$. Definim spațiul

$$(4.19) \quad V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}[0, 1] : v(0) = v(1) = 0, \quad v|_{K_i} = \alpha x + \beta, \quad 1 \leq i \leq N \right\}.$$

Rezultă imediat că V_h este un spațiu liniar inclus în V .

În plus, el este de dimensiune finită, egală cu N . Pentru a demonstra acest lucru, pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, definim funcția φ_i prin

$$(4.20) \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{dacă } x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{dacă } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să observăm că $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, pentru orice $1 \leq i, j \leq N$. Obținem că $\varphi_i \in V_h$ și $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ formează o bază în V_h . Într-adevăr, $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ este liniar independentă deoarece

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \varphi_i = 0 & \Rightarrow \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \varphi_i \right) (x_j) = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq N \\ & \Rightarrow \alpha_j = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Ea este și sistem de generatori deoarece pentru orice $v \in V_h$ avem că

$$v = \sum_{1 \leq i \leq N} v(x_i) \varphi_i.$$

Am construit în acest mod un subspațiu V_h al lui V de dimensiune finită. Mai mult, baza $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ nu depinde de forma biliniară din problema (4.18),

având un caracter destul de general. De fapt, construcția poate fi realizată doar cu mici modificări chiar în domenii multidimensionale.

Pe V_h vom considera problema

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \int_0^1 p(x)u'_h(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 q(x)u_h(x)\varphi(x)dx = \\ = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in V_h \end{aligned}$$

care are o soluție unică $u_h \in V_h$. Ea se determină după formula

$$(4.22) \quad u_h = \sum_{i=1}^N u_h^i \varphi_i$$

unde $U = (u_h^i)_{1 \leq i \leq N}$ este soluția sistemului de ecuații liniare

$$(4.23) \quad RU = F.$$

Matricea de rigiditate R are elementele $R_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ iar vectorul F este de componente $F_j = L(\varphi_j)$.

Deoarece suporturile funcțiilor φ_i și φ_j nu se intersectează decât în cel mult un punct când $|i - j| > 1$, rezultă că matricea R este tridiagonală și prin urmare are foarte multe elemente nule. În timp ce dimensiunea sa este N (care poate fi foarte mare), numărul elementelor nenule de pe o linie este cel mult egal cu trei. Am realizat în acest fel două dintre dezideratele metodei de aproximare:

- Am construit spațiul V_h și o bază a sa într-un mod simplu și generalizabil.
- Am obținut un sistem de ecuații liniare convenabil din punct de vedere al calculului soluției.

Vom analiza în secțiunea următoare eroarea comisă prin aproximarea lui u cu u_h în acest caz și convergența metodei.

4.5.2 Convergența aproximațiilor

După cum am văzut în teorema 4.3.2, pentru a da o estimare a erorii $e_h = u - u_h$, este suficient să evaluăm, în norma din V , diferența dintre soluția exactă u și un element din subspațiul V_h . Desigur, vom căuta un element $U_h \in V_h$ astfel încât diferența $u - U_h$ să fie mică. Nu vom urmări să determinăm

cea mai bună aproximare a lui u în V_h , deoarece acest lucru poate fi dificil. De exemplu, să observăm că, în norma dată de forma biliniară a , aceasta ar însemna chiar găsirea lui u_h ! De aceea, ne vom limita la determinarea unui $U_h \in V_h$ suficient de aproape de u și anume la interpolatul lui u în V_h . Detaliile pentru cazul general sunt laborioase și vor fi prezentate în capitolul 5. În această secțiune ne vom limita la considerarea cazului 1-D, care este mult mai ușor de prezentat și care ne va servi drept model pentru trecerea la cazul multidimensional.

Fie U_h interpolatul lui u în V_h , adică cea unică funcție ce aparține lui V_h și coincide cu u în toate punctele x_i . U_h este dat de

$$(4.24) \quad U_h = \sum_{i=1}^N u(ih)\varphi_i.$$

Evident, $U_h \in V_h$. De asemenea, $U_h(ih) = u(ih)$, $1 \leq i \leq N$.

Reamintim că prin $\|\cdot\|_0$ și $\|\cdot\|_1$ vom nota normele din $L^2(0, 1)$ și respectiv $H_0^1(0, 1)$. Avem următorul rezultat

Teorema 4.5.1 *Fie u o funcție din $H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ și U_h dat de (4.24). Atunci există o constantă pozitivă c independentă de h astfel încât*

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \|u - U_h\|_0 &\leq ch^2 \|u''\|_0, \\ \|u - U_h\|_1 &\leq ch \|u''\|_0. \end{aligned}$$

Demonstrație: Să considerăm un interval $[x_i, x_{i+1}]$ și să definim $\Delta(x) = u(x) - U_h(x)$, funcție care se anulează în x_i și x_{i+1} . Prin dezvoltare în serie Fourier obținem

$$\Delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi(x - x_i)}{h}\right).$$

Din ortogonalitatea funcțiilor $\sin\left(\frac{n\pi(x - x_i)}{h}\right)$ în $L^2(x_i, x_{i+1})$ se deduce că

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta')^2 dx &= \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{n^2 \pi^2}{h^2}, \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta'')^2 dx &= \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{h^4}. \end{aligned}$$

Din cele două egalități de mai sus și cum $(U_h)''(x) = 0$ pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, rezultă că

$$(4.26) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta')^2 dx \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta'')^2 dx = \frac{h^2}{\pi^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'')^2 dx.$$

Prin urmare

$$\int_0^1 (\Delta')^2 dx = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta')^2 dx \leq \frac{h^2}{\pi^2} \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'')^2 dx = \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^1 (u'')^2 dx$$

și a doua inegalitate (4.25) este demonstrată.

Pentru prima inegalitate vom observa că

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta)^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

și vom proceda în mod similar

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\Delta)^2 dx &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta)^2 dx \leq \\ &\leq \frac{h^4}{\pi^4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta'')^2 dx = \frac{h^4}{\pi^4} \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'')^2 dx = \frac{h^4}{\pi^4} \int_0^1 (u'')^2 dx. \end{aligned}$$

Demonstrația teoremei este încheiată. ■

Se pot obține estimări similare celor din teorema 4.5.1 și în norma din $C[0, 1]$.

Teorema 4.5.2 Dacă $u \in C^2[0, 1]$ și U_h este dat de (4.24) atunci

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \max_{x \in [0, 1]} |u(x) - U_h(x)| &\leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [0, 1]} |u''(x)|, \\ \max_{x \in [0, 1]} |u'(x) - U'_h(x)| &\leq h \max_{x \in [0, 1]} |u''(x)|. \end{aligned}$$

Demonstrație: Fie $x \in [0, 1]$ și $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ astfel încât $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Considerăm funcția $\Delta(x) = u(x) - U_h(x)$ definită pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ și care se anulează în x_i și x_{i+1} . Rezultă că există $z \in [x_i, x_{i+1}]$ cu proprietatea că $\Delta'(z) = 0$, și prin urmare avem că

$$\Delta'(x) = \int_z^x \Delta''(t) dt.$$

Cum $\Delta'' = u''$ pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, obținem că

$$|\Delta'(x)| = \left| \int_z^x \Delta''(t) dt \right| = \left| \int_z^x u''(t) dt \right| \leq h \max_{x \in [0, 1]} |u''(x)|$$

și a doua inegalitate (4.27) este demonstrată.

Pentru prima inegalitate, fie $x_m \in [x_i, x_{i+1}]$ cu proprietatea că

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |\Delta(x)| = |\Delta(x_m)|.$$

Dacă $\Delta(x_m) = 0$ atunci inegalitatea (4.27) se verifică în mod trivial. Dacă $\Delta(x_m) \neq 0$ atunci $x_m \in (x_i, x_{i+1})$ și $\Delta'(x_m) = 0$. Vom folosi dezvoltarea Taylor

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \Delta(x_m) + (x_m - x)\Delta'(x_m) + \frac{(x_m - x)^2}{2}\Delta''(\xi) = \\ &= \Delta(x_m) + \frac{(x_m - x)^2}{2}\Delta''(\xi) \end{aligned}$$

pentru orice $x \in [x_i, x_{i+1}]$ și unde ξ este un număr între x și x_m .

Luând drept x capătul intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ cel mai apropiat de x_m , obținem că

$$|\Delta(x_m)| \leq \frac{h^2}{8} |\Delta''(\xi)|$$

și prima inegalitate (4.27) este, de asemenea, demonstrată. ■

Observația 4.5.1 Din (4.27) se obține (4.25) cu norma $\max_{x \in [0,1]} |u''(x)|$ în locul lui $\|u''\|_0$. Oricum, pentru deducerea lui (4.27) am avut nevoie de mai multă regularitate a lui u decât în (4.25). □

Ca urmare a teoremei 4.5.1 avem următorul rezultat de convergență

Teorema 4.5.3 Dacă soluția problemei (4.18) este $u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ iar soluția problemei (4.21) este u_h atunci

$$(4.28) \quad \|u - u_h\|_1 \leq ch \|u''\|_0,$$

unde c este o constantă pozitivă independentă de h .

Demonstrație: Folosind teorema 4.3.2 avem că

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{\varphi \in V_h} \|u - \varphi\|_1.$$

Rezultatul se obține observând că $U_h \in V_h$ și folosind teorema 4.5.1

$$\inf_{\varphi \in V_h} \|u - \varphi\|_1 \leq \|u - U_h\|_1 \leq ch \|u''\|_0$$

și demonstrația se termină. ■

Teorema 4.5.3 oferă o estimare a erorii în metoda elementului finit în norma din H^1 . Se poate însă obține o evaluare și în norma din L^2 .

Teorema 4.5.4 *Dacă soluția problemei (4.18) este $u \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ iar soluția problemei (4.21) este u_h atunci*

$$(4.29) \quad \|u - u_h\|_0 \leq ch^2 \|u''\|_0,$$

unde c este o constantă pozitivă independentă de h .

Demonstrație: Fie z soluția lui (4.18) cu $f = e_h = u - u_h$. Folosind ca funcție test pe e_h , rezultă că

$$(4.30) \quad a(z, e_h) = \|e_h\|_0^2$$

unde a este forma biliniară din (4.18).

Pe de altă parte, cum $a(e_h, \varphi) = 0$ pentru orice $\varphi \in V_h$, rezultă că,

$$(4.31) \quad a(z - \varphi, e_h) = a(z, e_h) = \|e_h\|_0^2, \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Aplicând inegalitatea lui Hölder obținem că, pentru orice $\varphi \in V_h$,

$$(4.32) \quad \|e_h\|_0^2 = a(z - \varphi, e_h) \leq [a(z - \varphi, z - \varphi)]^{1/2} [a(e_h, e_h)]^{1/2}.$$

Din teorema 4.5.3 avem că

$$[a(e_h, e_h)]^{1/2} \leq C \|e_h\|_1 \leq Ch \|u''\|_0.$$

În plus, dacă z_h este aproximarea lui z dată de (4.21), avem tot din teorema 4.5.3 că

$$[a(z - z_h, z - z_h)]^{1/2} \leq Ch \|z''\|_0.$$

Revenind la (4.32) și luând $\varphi = z_h$, obținem că

$$(4.33) \quad \|e_h\|_0^2 \leq Ch^2 \|u''\|_0 \|z''\|_0 \leq Ch^2 \|u''\|_0 \|z\|_2.$$

Folosind faptul că aplicația care asociază fiecărui termen f soluția corespunzătoare u a ecuației (4.18) este continuă din L^2 în H^2 (vezi [4]),

$$(4.34) \quad \|z''\|_0 \leq \|z\|_2 \leq C \|e_h\|_0,$$

demonstrația se încheie. ■

Observația 4.5.2 *Să presupunem că $u \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$. Teorema 4.5.3 arată că*

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch.$$

Să mai presupunem că

$$(4.35) \quad u(x_i) = u_h(x_i), \quad \forall 1 \leq i \leq N.$$

Rezultă că, pentru orice $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$|u(x) - u_h(x)| = \left| \int_{x_i}^x (u'(t) - u'_h(t)) dt \right| \leq h \|u' - u'_h\|_0 \leq h \|u - u_h\|_1 \leq ch^2.$$

Prin urmare am obținut o evaluare a erorii în norma din $\mathcal{C}[0, 1]$

$$(4.36) \quad \max_{x \in [0, 1]} |u(x) - u_h(x)| \leq ch^2.$$

Să mai notăm că (4.35) se verifică în cazurile de superconvergență care vor fi descrise în secțiunea următoare. $\square$

4.5.3 Fenomenul de superconvergență

Ne vom referi în cele ce urmează la convergența punctuală a metodei, considerând însă doar cazul nodurilor triangulației x_i , $1 \leq i \leq N$ și ca model ecuația

$$(4.37) \quad \int_0^1 u'(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, 1)$$

care are o soluție unică $u \in H_0^1(0, 1)$.

În urma discretizării prin elemente finite ca mai sus, vom obține o aproximare a soluției u a lui (4.37) prin u_h , soluția ecuației

$$(4.38) \quad \int_0^1 u'_h(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Prin scăderea relațiilor (4.37) și (4.38) se obține

$$(4.39) \quad \int_0^1 (u - u_h)'(x) \varphi'(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Fie φ_i baza în V_h construită anterior și

$$(4.40) \quad u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_h^j \varphi_j(x).$$

Să observăm că u_h^j este valoarea lui u_h în x_j și prin urmare $u(x_j) \approx u_h(x_j) = u_h^j$, $1 \leq j \leq N$. De fapt avem mult mai mult

Propoziția 4.5.1 *Dacă u este soluția lui (4.37) iar u_h soluția lui (4.38), atunci pentru orice $N \geq 1$*

$$(4.41) \quad u(x_j) = u_h(x_j) = u_h^j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Demonstrație: Fie $y \in (0, 1)$ și să considerăm ecuația

$$(4.42) \quad \begin{cases} g'' + \delta_y = 0 \\ g(0) = g(1) = 0 \end{cases}$$

unde δ_y este funcția lui Dirac în punctul y .

Formularea variațională a lui (4.42) este

$$(4.43) \quad \int_0^1 g'(x)\varphi'(x)dx = \varphi(y), \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, 1)$$

iar această ultimă ecuație are o soluție unică

$$g(x) = \begin{cases} (1-y)x & x < y \\ (1-x)y & x \geq y. \end{cases}$$

Să observăm că dacă $y = x_i$ atunci $g \in V_h$. Prin urmare în acest caz g poate fi folosită ca funcție test în (4.39). Ținând cont de (4.43) și (4.39) obținem că

$$u(x_i) - u_h(x_i) = \int_0^1 g'(x)(u - u_h)'(x)dx = 0$$

și demonstrația se încheie. ■

Rezultatul demonstrat de proprietatea 4.5.1 arată că, în nodurile x_j , soluția exactă coincide cu cea aproximativă. Această proprietate este cunoscută sub numele de **superconvergență** deoarece în aceste puncte eroarea este mult mai mică (de fapt egală cu zero) decât cea prevăzută de teorie în cazul general.

Observația 4.5.3 *Fenomenul de superconvergență nu este specific doar discretizării prin elemente finite liniare. Același rezultat se obține în nodurile triangulației și în alte discretizări, dacă soluția lui (4.42) aparține spațiului corespunzător V_h ori de câte ori y este un astfel de nod. □*

4.6 Exerciții

1. Ce se obține dacă se aplică metoda Galerkin ecuației

$$\begin{cases} -u_{xx} + u = f & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

2. Cu notațiile din teorema 4.5.1, demonstrați că, pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$ avem că $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - U_h\|_1 = 0$. Demonstrați convergența șirului $(u_h)_{h>0}$ la u când h tinde la zero în ipoteza în care $u \in H_0^1(\Omega)$.
3. Cu notațiile din teorema 4.5.1, rezolvați problema variațională

$$\max \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta')^2 dx : \Delta(x_i) = \Delta(x_{i+1}) = 0, \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta'')^2 dx = 1 \right\}$$

și demonstrați inegalitatea (4.26).

4. Dacă u_h este soluția problemei (4.21) și $f(x) \leq 0$ a.p.t. în $(0, 1)$ atunci $u_h(x) \leq 0$, $\forall x \in (0, 1)$.
5. Comparați sistemul (4.23) de ecuații liniare obținut prin metoda elementelor finite cu cel care rezultă folosind diferențe finite. Ce se întâmplă dacă p și q sunt constante? Poate avea loc fenomenul de superconvergență în cazul metodei diferențelor finite?
6. Presupunând că $q(x) \geq q_0 > 0$ a.p.t. în $[0, 1]$, adaptați construcția folosită pentru rezolvarea numerică a ecuației (4.18) din secțiunea 4.5, dacă se consideră $V = H^1(0, 1)$ în loc de $V = H_0^1(0, 1)$. Soluția cărei ecuații se aproximează în acest caz?
7. Adaptați metoda folosită în secțiunea 4.5 pentru a aproxima soluția ecuațiilor următoare

$$a) \begin{cases} -u_{xx} + u = f, & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1), & u_x(0) = u_x(1), \end{cases} \quad b) \begin{cases} -u_{xx} + u = f, & x \in (0, 1) \\ u(0) = u_x(1) + u(1) = 0. \end{cases}$$

Capitolul 5

Interpolare în $\mathbb{R}^N$

În acest capitol vom prezenta câteva rezultate legate de interpolarea în $\mathbb{R}^N$ și de estimarea erorii în norma spațiilor Sobolev. Ideea interpolării este aceea de a înlocui o funcție definită pe un domeniu din $\mathbb{R}^N$ cu o altă funcție, mai simplă (de regulă, polinom), care să coincidă cu cea inițială într-un număr dat de puncte. Vom vedea în ce condiții acest lucru este posibil și cum se evaluează diferența dintre cele două funcții. Vom fi mai ales interesați de evaluări în norma spațiului Sobolev H^r , care vor servi mai departe la determinarea erorii în metoda elementului finit.

Pentru simplitate, multe dintre domeniile pe care le vom considera vor fi poliedre (poligoane). Astfel, noțiunea de poliedru devine centrală în teoria de care ne ocupăm. Să începem prin câteva precizări și definiții.

Definiția 5.0.1 *O submulțime $K \subset \mathbb{R}^N$ este un **poliedru (poligon)** din $\mathbb{R}^N$ dacă este o intersecție finită de hipersemispații închise din $\mathbb{R}^N$.*

Definiția 5.0.2 *O parte a frontierei poliedrului K , $K' \subset \partial K$, se numește **față** a lui K dacă există un unic hiperplan din $\mathbb{R}^N$ a cărui intersecție cu K este K' .*

Reamintim că un hiperplan H din $\mathbb{R}^N$ se definește prin

$$H = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \langle x, a \rangle = b\}$$

unde $a \in \mathbb{R}^N$ și $b \in \mathbb{R}$ sunt date iar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^N$. Un hipersemispațiu închis din $\mathbb{R}^N$ este o mulțime de forma

$$HS = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \langle x, a \rangle \geq b\}.$$

Să observăm că fața K' a unui poliedru K este o intersecție maximală a unui hiperplan din $\mathbb{R}^N$ cu K , adică nu există alt hiperplan a cărui intersecție cu K să conțină în mod strict pe K' .

5.1 Elemente finite Lagrange

Elementele finite Lagrange sunt pietrele de temelie ale metodei elementului finit. Ele au o mare importanță, atât din punct de vedere teoretic cât și practic, iar o bună cunoaștere a lor este indispensabilă pentru buna funcționare a metodei.

Definiția 5.1.1 *Un triplet (K, Σ, P) se numește element finit Lagrange dacă*

1. $K \subset \mathbb{R}^N$ este un compact conex de interior nevid
2. $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_d\} \subset K$ este o submulțime finită de puncte din K
3. P este un spațiu vectorial de dimensiune finită de funcții definite în K și cu valori reale
4. Σ este P -unisolventă: pentru orice scalari $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ există o unică funcție $v \in P$ astfel încât $v(a_i) = \alpha_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Vom oferi în continuare câteva exemple de elemente finite Lagrange în dimensiune $N = 1$. Alte exemple, pentru $N \geq 2$, vor fi date într-una din secțiunile următoare. Lăsăm cititorului verificarea condițiilor din definiția elementelor finite Lagrange.

Exemple:

1. $K = [0, 1]$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $P = \{v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
2. $K = [0, 1]$, $\Sigma = \{0, 1/2, 1\}$, $P = \{v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.
3. $K = [0, 1]$, $\Sigma = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$, $P = \{v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$.

Dat un element finit Lagrange (K, Σ, P) , următorul rezultat privește posibilitatea construirii unei baze canonice în P .

Propoziția 5.1.1 Pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ există o unică funcție $\varphi_i \in P$ cu proprietatea

$$(5.1) \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad j \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

În plus, $\dim(P) = \text{card}(\Sigma)$ și $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ formează o bază în P .

Demonstrație: Prima parte este o consecință directă a proprietății de P -unisolență a lui Σ . Pentru cea de-a doua parte să observăm că

1. $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ este liniar independentă. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d b_i \varphi_i = 0 &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^d b_i \varphi_i \right) (a_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq d \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^d b_i \varphi_i(a_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq d \Rightarrow b_j = 0, \quad 1 \leq j \leq d. \end{aligned}$$

2. $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ este sistem de generatori deoarece, pentru orice $v \in P$,

$$v = \sum_{i=1}^d v(a_i) \varphi_i.$$

Această egalitate decurge din proprietatea de P -unisolență a lui Σ și are loc deoarece funcțiile din cei doi membri aparțin lui P și iau aceleași valori în punctele din Σ .

Rezultă că $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ formează o bază în P și demonstrația se încheie. ■

Observația 5.1.1 Din proprietatea 5.1.1 rezultă că o condiție necesară pentru ca o mulțime Σ să fie P -unisolență este

$$(5.2) \quad \text{card}(\Sigma) = \dim(P) = d.$$

Dacă lui (5.2) îi adăugăm existența unor funcții $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ din P cu proprietatea (5.1), obținem o condiție necesară și suficientă pentru ca o mulțime Σ să fie P -unisolență. □

Unul dintre obiective este acela de a aproxima funcții definite în K prin funcții din P . Pentru aceasta definim următorul operator

$$(5.3) \quad \Pi_K : \mathcal{C}(K) \rightarrow P, \quad \Pi_K(v) = \sum_{i=1}^d v(a_i) \varphi_i \in P.$$

Definiția 5.1.2 Operatorul liniar Π_K se numește **operator de interpolare în K** .

Să notăm că, pentru fiecare $v \in \mathcal{C}(K)$, $\Pi_K(v)$ este cea unică funcție din P care coincide cu v în punctele din Σ . $\Pi_K(v)$ va servi ca aproximare a lui v în P .

Metoda elementului finit va porni de la construirea unor familii de elemente finite Lagrange. De fapt, în practică se consideră un element finit Lagrange, numit element de referință, și se obține o familie de astfel de elemente prin transformări homeomorfe. Avem următorul rezultat

Propoziția 5.1.2 Fie $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ un element finit Lagrange și $F : \hat{K} \rightarrow F(\hat{K}) \subset \mathbb{R}^N$ o aplicație bijectivă, continuă și cu inversa continuă. Dacă definim

$$K = F(\hat{K}), \quad \Sigma = F(\hat{\Sigma}) \quad \text{și} \quad P = \{v : K \rightarrow \mathbb{R} : v \circ F \in \hat{P}\}$$

atunci (K, Σ, P) este, de asemenea, un element finit Lagrange.

Demonstrație: Din proprietatea de continuitate a lui F , K este nevid, compact și conex. Σ este o submulțime finită de puncte din K , având același cardinal cu $\hat{\Sigma}$.

P este un spațiu vectorial de funcții definite în K . El are aceeași dimensiune cu $\hat{P}$. De fapt, dacă $(\hat{p}_i)_{1 \leq i \leq d}$ este baza din $\hat{P}$ dată de proprietatea 5.1.1, atunci $(\hat{p}_i \circ F^{-1})_{1 \leq i \leq d}$ este o bază din P . Ținând cont de observația 5.1.1 rezultă că Σ este P -unisolventă. ■

Observația 5.1.2 Fie $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ o aplicație afină definită prin

$$(5.4) \quad F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$$

unde B este o matrice pătratică inversabilă iar b este un vector de dimensiune N . În acest caz sunt îndeplinite condițiile din proprietatea 5.1.2. Elementele finite obținute prin intermediul unei aplicații F de acest tip se numesc **afin-echivalente**. □

În cele ce urmează vom descrie pe scurt două tipuri de elemente finite foarte des folosite ca elemente de referință.

5.2 Simplexuri

Fie $A_i \in \mathbb{R}^N$, $1 \leq i \leq N$, N punctele ale căror coordonate sunt toate egale cu zero, exceptând a i -a coordonată care este egală cu 1 iar A_0 punctul de coordonate egale cu zero. Fie, de asemenea, $\widehat{K}$ acoperirea convexă a punctelor $(A_i)_{0 \leq i \leq N}$,

$$\widehat{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : x = \sum_{i=0}^N \lambda_i A_i, \quad \sum_{0 \leq i \leq N} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Prin $\widehat{\mathbb{P}}_k$ notăm mulțimea polinoamelor definite în $\widehat{K}$ de N variabile și de grad cel mult k în raport cu toate variabilele,

$$\widehat{\mathbb{P}}_k = \left\{ p(x) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_N \geq 0 \\ i_1 + i_2 + \dots + i_N \leq k}} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_N} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_N^{i_N}, \quad \alpha_{i_1 i_2 \dots i_N} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dimensiunea spațiului $\widehat{\mathbb{P}}_k$ este C_{N+k}^k . Într-adevăr, numărul termenilor de forma $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_N^{i_N}$ cu $i_1 + i_2 + \dots + i_N = p$ este egal cu numărul de posibilități de alegere (cu repetiție) a p dintre cele N variabile $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$. Acest număr este egal cu C_{N+p-1}^p . Prin inducție după k se demonstrează că

$$\sum_{p=0}^k C_{N+p-1}^p = C_{N+k}^k.$$

Prin urmare

$$(5.5) \quad \dim(\widehat{\mathbb{P}}_k) = C_{N+k}^k.$$

De asemenea, definim mulțimea

$$\widehat{\Sigma} = \left\{ a \in \widehat{K} : a = \sum_{i=0}^N \lambda_i A_i, \quad \sum_{0 \leq i \leq N} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \right\}.$$

Cardinalul mulțimii $\widehat{\Sigma}$ este egal cu numărul posibilităților de alegere cu repetiție a k dintre $N+1$ elemente, adică

$$(5.6) \quad \text{card}(\widehat{\Sigma}) = C_{N+k}^k.$$

Să remarcăm că punctele din $\widehat{\Sigma}$ (și cele din $\widehat{K}$) sunt unic determinate de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. De fapt, coordonatele carteziene ale unui punct din $\widehat{\Sigma}$ sunt chiar $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$.

Propoziția 5.2.1 *Tripletul $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{P}}_k)$ este un element finit Lagrange.*

Demonstrație: Singurul lucru care trebuie demonstrat este unisolența mulțimii $\widehat{\Sigma}$ în raport cu $\widehat{\mathbb{P}}_k$. Acest lucru rezultă din egalitatea dimensiunii lui $\widehat{\mathbb{P}}_k$ și a cardinalului lui $\widehat{\Sigma}$ dacă arătăm că există o bază a lui $\widehat{\mathbb{P}}_k$ cu proprietatea (5.1). Pentru aceasta, fie $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in \widehat{\Sigma}$ și definim

$$\varphi_a(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ a_i \neq 0}}^{N+1} \prod_{j=1}^{ka_i-1} \left(\frac{k}{j} x_i - 1 \right), \quad x \in \widehat{K}$$

unde $x_{N+1} = 1 - \sum_{i=1}^N x_i$ și $a_{N+1} = 1 - \sum_{i=1}^N a_i$. Să observăm că

$$\varphi_a(a) = \prod_{\substack{i=1 \\ a_i \neq 0}}^{N+1} \prod_{j=1}^{ka_i-1} \frac{ka_i - j}{j} = \prod_{\substack{i=1 \\ a_i \neq 0}}^{N+1} \frac{(ka_i - 1)!}{(ka_i - 1)!} = 1.$$

Pe de altă parte, dacă $b = (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \widehat{\Sigma}$ este un punct diferit de a din $\widehat{\Sigma}$, rezultă că

$$\varphi_a(b) = \prod_{\substack{i=1 \\ a_i \neq 0}}^{N+1} \prod_{j=1}^{ka_i-1} \frac{kb_i - j}{j} = 0$$

deoarece $\prod_{j=1}^{ka_{i_0}-1} (kb_{i_0} - j) = 0$. Într-adevăr, există cel puțin un indice i_0 cu proprietatea că $kb_{i_0} < ka_{i_0}$ deoarece, dacă $kb_i \geq ka_i$ pentru orice i rezultă că

$$0 \leq \sum_{i=1}^{N+1} k(b_i - a_i) = k \left(\sum_{i=1}^{N+1} b_i - \sum_{i=1}^{N+1} a_i \right) = 0$$

și ar rezulta că $b_i = a_i$ pentru orice i ceea ce este imposibil.

Am construit o bază $(\varphi_a)_{a \in \widehat{\Sigma}}$ a lui $\widehat{\mathbb{P}}_k$ și demonstrația se termină. ■

Definiția 5.2.1 *Tripletul $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{P}}_k)$ din propoziția 5.2.1 este un N -simplex de tipul k de referință.*

Vom oferi în continuare câteva exemple de simplexuri în dimensiune $N \geq 2$. Să observăm că exemplele din secțiunea precedentă în cazul $N = 1$ sunt, de asemenea, simplexuri.

- $N = 2$, $\widehat{K} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y \leq (1 - x)\}$

2-simplex de tipul 1

$$\widehat{\Sigma} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\},$$

$$\widehat{\mathbb{P}}_1 = \{q(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y : \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3\}.$$

2-simplex de tipul 2

$$\widehat{\Sigma} = \{(0, 0), (1/2, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 1/2), (1/2, 1/2)\},$$

$$\widehat{\mathbb{P}}_1 = \{q(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 : \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 6\}.$$

- $N = 3$, $\widehat{K} = \{(x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq y \leq (1 - x), 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$

3-simplex de tipul 1

$$\widehat{\Sigma} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$\widehat{\mathbb{P}}_1 = \{q(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z : \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 4\}.$$

5.3 Paraleltopuri

Fie $\widehat{K}$ cubul unitate din $\mathbb{R}^N$,

$$\widehat{K} = \{x \in \mathbb{R}^N : x = (x_1, x_2, \dots, x_N), 1 \leq x_i \leq 1\}.$$

Prin $\widehat{\mathbb{Q}}_k$ notăm mulțimea polinoamelor definite în $\widehat{K}$ de N variabile și de grad cel mult k în raport cu fiecare variabilă,

$$\widehat{\mathbb{Q}}_k = \left\{ \widehat{q}(x) = \sum_{0 \leq i_1, i_2, \dots, i_N \leq k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_N} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_N^{i_N}, \alpha_{i_1 i_2 \dots i_N} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dimensiunea spațiului $\widehat{\mathbb{Q}}_k$ este $(k+1)^N$. Într-adevăr, numărul termenilor de forma $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_N^{i_N}$ cu $0 \leq i_j \leq k$ este egal cu numărul de funcții definite în mulțimea $\{1, 2, \dots, N\}$ și cu valori în $\{0, 1, \dots, k\}$. Acest număr este egal cu $(k+1)^N$. Astfel,

$$(5.7) \quad \dim(\widehat{\mathbb{Q}}_k) = (k+1)^N.$$

De asemenea, definim

$$\widehat{\Sigma} = \left\{ x \in \widehat{K} : x = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad x_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \right\}.$$

Cardinalul mulțimii Σ este egal cu numărul funcțiilor definite în mulțimea $\{1, 2, \dots, N\}$ și cu valori în $\{0, 1/k, \dots, (k-1)/k, 1\}$, adică

$$(5.8) \quad \text{card}(\Sigma) = (k+1)^N.$$

Propoziția 5.3.1 *Tripletul $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{Q}}_k)$ este un element finit Lagrange.*

Demonstrație: Singurul lucru care mai rămâne de demonstrat este unisolența mulțimii $\widehat{\Sigma}$ în raport cu $\widehat{\mathbb{Q}}_k$. Acest lucru rezultă din egalitatea dimensiunii lui $\widehat{\mathbb{Q}}_k$ și a cardinalului lui $\widehat{\Sigma}$ dacă arătăm că există o bază a lui $\widehat{\mathbb{Q}}_k$ cu proprietatea (5.1). Pentru aceasta, fie $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in \widehat{\Sigma}$ și definim

$$q_a(x) = \prod_{i=1}^N \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq ka_i}}^k \left(\frac{kx_i - j}{ka_i - j} \right), \quad x \in \widehat{K}.$$

Se arată ușor că $(q_a)_{a \in \widehat{\Sigma}}$ verifică (5.1) și demonstrația se încheie. ■

Definiția 5.3.1 *Tripletul $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{Q}}_k)$ din propoziția 5.3.1 este un N -paralelotop de tipul k de referință.*

Vom oferi în continuare câteva exemple de paralelotopuri în dimensiune $N \geq 2$. Să observăm că exemplele din secțiunea precedentă în cazul $N = 1$ sunt, de asemenea, paralelotopuri.

- $N = 2$, $\widehat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$

2-paralelotop de tipul 1.

$$\widehat{\Sigma} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\},$$

$$\widehat{\mathbb{Q}}_1 = \{q(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy : \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 4\}.$$

2-paralelotop de tipul 2.

$$\widehat{\Sigma} = \{(0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0), (1, \frac{1}{2}), (1, 1), (\frac{1}{2}, 1), (0, 1), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$$

$$\widehat{\mathbb{Q}}_1 = \{q(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^2 y^2 : \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 9\}.$$

- $N = 3$, $\widehat{K} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

3-paralelotop de tipul 1.

$$\widehat{\Sigma} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\},$$

$$\widehat{\mathbb{Q}}_1 = \{q(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 xz + \alpha_8 xyz : \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 8\}.$$

5.4 Eroarea în interpolare

După cum am văzut în teorema 4.3.2, pentru estimarea diferenței între soluția exactă u și cea aproximativă u_h este suficient să analizăm cantitatea $\inf_{\varphi \in V_h} \|u - \varphi\|$. Pentru aceasta vom considera că $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ și vom construi un element $\Pi_h u \in V_h$ cu proprietatea că $\|u - \Pi_h u\| = o(h)$. Astfel, convergența metodei și evaluarea erorii rezultă din estimarea diferenței $u - \Pi_h u$. Elementul $\Pi_h u$ se va obține cu ajutorul operatorului de interpolare Π_K definit în (5.3). Scopul acestei secțiuni este acela de a da o evaluare a diferenței dintre o funcție u și interpolatul ei pe K , $\Pi_K u$.

Începem prin câteva notații. Fie (K, Σ, P) un element finit Lagrange. Vom nota prin

$$(5.9) \quad \begin{aligned} h_K &= \text{diam}(K) = \sup\{\text{dist}(x, y) : x, y \in K\}, \\ \rho_K &= \sup\{\rho \in \mathbb{R} : \text{există o sferă de diametru } \rho \text{ inclusă în } K\}. \end{aligned}$$

Observația 5.4.1 *Dacă K este un compact, există o sferă S_K cu proprietatea că*

$$(5.10) \quad \rho_K = \text{diam}(S_K),$$

deci supremumul din definiția lui ρ_K se atinge.

Pentru a demonstra acest lucru să observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^$ există o sferă $S_n \subset K$ de diametru $\rho_K - \frac{1}{n}$. Fie $x_n \in K$ centrul sferei S_n . Șirul $(x_n)_{n>0} \subset K$ are un subșir convergent (notat la fel) convergent la $x \in K$. Demonstrăm că sfera S_K de centru x și rază $\frac{1}{2}\rho_K$ este conținută în K .*

Dat $\varepsilon > 0$ suficient de mic, fie S_ε sfera de rază $\frac{1}{2}(\rho_K - \varepsilon)$ și centru x . Demonstrăm că există $m > 0$ astfel ca

$$S_\varepsilon \subseteq S_m \subseteq K.$$

Intr-adevăr, pentru orice $y \in S_\varepsilon$, avem că

$$\|x_m - y\| \leq \|x_m - x\| + \|x - y\| \leq \|x_m - x\| + \frac{1}{2}(\rho_K - \varepsilon).$$

Alegând m suficient de mare astfel ca $\frac{1}{2m} + \|x_m - x\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ obținem că $y \in S_m$.

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă că $S_K \subset K$. Într-adevăr fie $y \in S_K$ și fie

$$y_\varepsilon = y - \frac{\varepsilon}{\rho_K}(y - x) = \frac{\rho_K - \varepsilon}{\rho_K}(y - x) + x = \frac{\rho_K - \varepsilon}{\rho_K}y + \left(1 - \frac{\rho_K - \varepsilon}{\rho_K}\right)x \in S_\varepsilon.$$

Rezultă că șirul $(y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ este inclus în K și cum el este convergent la y , obținem că $y \in K$. $\square$

Reamintim că, dacă $v \in H^m(\Omega)$,

$$(5.11) \quad |v|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha v(x)|^2 dx$$

este o seminormă pe $H^m(\Omega)$ iar

$$(5.12) \quad \|v\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{l=0}^m |v|_{l,\Omega}^2.$$

Dacă domeniul Ω este clar din context, vom omite indicele Ω din notația normei și a seminormei.

Lema 5.4.1 Fie $K \subset \mathbb{R}^N$ compact, conex, de interior nevid și $v \in H^m(K)$. Dacă $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ cu $\det(B) \neq 0$ este o aplicație afină inversabilă și $\hat{K} = F^{-1}(K)$, definim $\hat{v} = v \circ F$. Atunci $\hat{v} \in H^m(\hat{K})$ și există o constantă $C = C(m, N)$ astfel încât

$$(5.13) \quad \begin{aligned} |\hat{v}|_{m,\hat{K}} &\leq C \|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |v|_{m,K}, \\ |v|_{m,K} &\leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\hat{v}|_{m,\hat{K}} \end{aligned}$$

unde $\|\cdot\|$ este norma matriceală subordonată normei euclidiene.

Demonstrație: Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ cu $|\alpha| = m$. Avem că

$$\begin{aligned} D^\alpha \hat{v}(\hat{x}) &= D^\alpha (v \circ F)(\hat{x}) \leq \\ &\leq C(m, N) \left(\sum_{\beta \in \mathbb{N}^N, |\beta|=m} |D^\beta v(x)|^2 \right)^{1/2} \max_{1 \leq k, i \leq N} |B_{ki}|^m \\ &\leq C \|B\|^m \left(\sum_{\beta \in \mathbb{N}^N, |\beta|=m} |D^\beta v(x)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Integrând obținem că

$$\int_{\hat{K}} |D^\alpha \hat{v}(\hat{x})|^2 d\hat{x} \leq C \|B\|^{2m} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^N, |\beta|=m} \int_{\hat{K}} |D^\beta v(F(\hat{x}))|^2 d\hat{x} =$$

$$\begin{aligned}
&= C \|B\|^{2m} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^N, |\beta|=m} |\det(B^{-1})| \int_K \left| D^\beta v(x) \right|^2 dx = \\
&= C \|B\|^{2m} |\det(B^{-1})| |v|_{m,K}^2
\end{aligned}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned}
|\hat{v}|_{m,\hat{K}}^2 &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha|=m} \int_{\hat{K}} |D^\alpha \hat{v}(\hat{x})|^2 d\hat{x} \leq \\
&\leq C \|B\|^{2m} |\det(B^{-1})| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha|=m} |v|_{m,K}^2 \leq C \|B\|^{2m} |\det(B^{-1})| |v|_{m,K}^2.
\end{aligned}$$

Prima inegalitate (5.13) este astfel demonstrată. Cea de a doua inegalitate se obține într-un mod analog. ■

Lema 5.4.2 *Dacă B este matricea aplicației F din lema 5.4.1 care duce pe $\hat{K}$ în K atunci*

$$(5.14) \quad \|B\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}}, \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K}$$

unde $\hat{h} = \text{diam}(\hat{K})$ iar $\hat{\rho} = \sup\{\text{diam}(S) : S \text{ sferă inclusă în } \hat{K}\}$.

Demonstrație: Avem că

$$\|B\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|B\xi\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\xi\|=\hat{\rho}} \|B\xi\|.$$

Fie $\xi \in \mathbb{R}^N$ cu $\|\xi\| = \hat{\rho}$. Rezultă că există $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{K}$ astfel ca $\hat{x} - \hat{y} = \xi$.

Într-adevăr, în observația 5.4.1 am văzut că există o sferă $\hat{S} \subset \hat{K}$ de centru $\hat{z}$ și cu $\text{diam}(\hat{S}) = \hat{\rho}$. Este suficient să luăm $\hat{x} = \hat{z} + \frac{1}{2}\xi \in \hat{S} \subset \hat{K}$, $\hat{y} = \hat{z} - \frac{1}{2}\xi \in \hat{S} \subset \hat{K}$.

Acum,

$$\|B\xi\| = \|B(\hat{x} - \hat{y})\| = \|F(\hat{x}) - F(\hat{y})\| \leq h_K$$

și prima relație (5.14) este demonstrată. Cealaltă relație (5.14) se demonstrează analog. ■

Lema 5.4.3 (*Bramble-Hilbert*) *Fie $m, s, l \geq 0$ și $\Lambda : H^s(\hat{K}) \rightarrow H^m(\hat{K})$ o aplicație liniară și continuă cu proprietatea că*

$$(5.15) \quad \Lambda(p) = 0, \quad \forall p \in \hat{\mathbb{P}}_l.$$

Atunci, pentru orice $\widehat{v} \in H^s(\widehat{K})$ avem că

$$(5.16) \quad |\Lambda(\widehat{v})|_{m,\widehat{K}} \leq \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(H^s,H^m)} \inf_{p \in \widehat{\mathbb{P}}_l} \|\widehat{v} - p\|_{s,\widehat{K}}.$$

Demonstrație: Fie $\widehat{v} \in H^s(\widehat{K})$ și $p \in \widehat{\mathbb{P}}_l$. Avem că

$$|\Lambda(\widehat{v})|_{m,\widehat{K}} = |\Lambda(\widehat{v} + p)|_{m,\widehat{K}} \leq \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(H^s,H^m)} \|\widehat{v} - p\|_{s,\widehat{K}}$$

și demonstrația se încheie. ■

Observația 5.4.2 *Operatorul de interpolare*

$$\Pi_{\widehat{K}} : \mathcal{C}(\widehat{K}) \rightarrow \widehat{P} \subset H^r(\widehat{K})$$

este bine definit ca operator liniar și continuu de la $H^s(\widehat{K})$ la $H^m(\widehat{K})$ dacă

- $m \leq r$ (caz în care $H^r(\widehat{K}) \subset H^m(\widehat{K})$)
- $s \geq 2$ (caz în care, dacă $N \in \{1, 2, 3\}$, $H^s(\widehat{K}) \subset \mathcal{C}(\widehat{K})$). □

Observația 5.4.3 *Presupunem că $\widehat{\mathbb{P}}_k \subseteq \widehat{P} \subset H^r(\Omega)$. Cum pentru orice $l \leq k$ $\widehat{\mathbb{P}}_l \subset \widehat{\mathbb{P}}_k$, operatorul de interpolare $\Pi_{\widehat{K}}$ are proprietatea că*

$$\Pi_{\widehat{K}}(p) = p, \quad \forall p \in \widehat{\mathbb{P}}_l.$$

Rezultă că, pentru orice $m \leq \min\{r, s\}$ și $s \geq 2$, operatorul

$$\Lambda = I - \Pi_{\widehat{K}} : H^s(\widehat{K}) \rightarrow H^m(\widehat{K})$$

este bine definit și satisface condițiile din lema 5.4.3. Prin urmare

$$(5.17) \quad \|\widehat{v} - \Pi_{\widehat{K}}\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}} \leq \|I - \Pi_{\widehat{K}}\|_{\mathcal{L}(H^s,H^m)} \inf_{p \in \widehat{\mathbb{P}}_l} \|\widehat{v} - p\|_{s,\widehat{K}}$$

pentru orice $\widehat{v} \in H^s(\widehat{K})$. □

Lema 5.4.4 (*Deny-Lions*) *Fie $\widehat{K}$ un compact conex de interior nevid și cu frontieră $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni. Pentru orice $l \geq 0$ există $C = C(l, N, \widehat{K})$ astfel încât*

$$(5.18) \quad \inf_{p \in \widehat{\mathbb{P}}_l} \|\widehat{v} + p\|_{l+1,\widehat{K}} \leq C \|\widehat{v}\|_{l+1,\widehat{K}}, \quad \forall \widehat{v} \in H^{l+1}(\widehat{K}).$$

Demonstrație: Din faptul că $\widehat{K}$ este de frontieră $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni rezultă că $H^{l+1}(\widehat{K}) \subset H^l(\widehat{K})$ cu incluziune compactă. Vom demonstra lema în mai mulți pași.

Pasul 1: Demonstrăm că există o constantă $C > 0$ astfel ca

$$(5.19) \quad \|\widehat{v}\|_{l+1,\widehat{K}} \leq C \left(|\widehat{v}|_{l+1,\widehat{K}}^2 + \sum_{|\alpha| \leq l} \left(\int_{\widehat{K}} D^\alpha \widehat{v} \right)^2 \right)^{1/2}, \forall \widehat{v} \in H^{l+1}(\widehat{K}).$$

Prin reducere la absurd presupunem că penru orice $n \geq 1$ există $\widehat{v}_n \in H^{l+1}(\widehat{K})$ astfel încât

$$\|\widehat{v}_n\|_{l+1,\widehat{K}} = 1, \quad |\widehat{v}_n|_{l+1,\widehat{K}}^2 + \sum_{|\alpha| \leq l} \left(\int_{\widehat{K}} D^\alpha \widehat{v}_n \right)^2 \leq \frac{1}{n}.$$

Șirul $(\widehat{v}_n)_{n>0}$, fiind mărginit în $H^{l+1}(\widehat{K})$, are un subșir (notat la fel) cu proprietatea că $\widehat{v}_n \rightarrow \widehat{v}$ în $H^l(\widehat{K})$ când n tinde la infinit.

Cum, în plus, $|\widehat{v}_n|_{l+1,\widehat{K}} \rightarrow 0$ când n tinde la infinit, obținem că $(\widehat{v}_n)_{n>0}$ este șir Cauchy și prin urmare convergent la $\widehat{v}$ în $H^{l+1}(\widehat{K})$. Avem că:

- $\|\widehat{v}\|_{l+1,\widehat{K}} = 1$
- $\widehat{v} \in \widehat{\mathbb{P}}_l$ deoarece $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{v}_n|_{l+1,\widehat{K}} = |\widehat{v}|_{l+1,\widehat{K}}$. Prin urmare $\widehat{v} = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$.
- $\int_{\widehat{K}} D^\alpha \widehat{v} = 0$ pentru orice multi-indice $|\alpha| \leq l$. Prin urmare, ținând cont de forma funcției, $\widehat{v} = 0$.

S-a obținut o contradicție și inegalitatea (5.19) este demonstrată.

Pasul 2: Demonstrăm că pentru orice $\widehat{v} \in H^{l+1}(\widehat{K})$ există un unic $q \in \widehat{\mathbb{P}}_l$ astfel ca

$$(5.20) \quad \int_{\widehat{K}} D^\alpha q = - \int_{\widehat{K}} D^\alpha \widehat{v}, \quad \forall |\alpha| \leq l.$$

Se consideră

$$q = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N} = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N} + q_1$$

cu $q_1 \in \widehat{\mathbb{P}}_{l-1}$.

Pentru fiecare $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ cu $|\alpha| = l$ obținem că

$$\int_{\widehat{K}} D^\alpha q = (\alpha_1)! \dots (\alpha_N)! |\widehat{K}|$$

și vom alege

$$a_\alpha = -\frac{1}{(\alpha_1)! \dots (\alpha_N)! |\widehat{K}|} \int_{\widehat{K}} D^\alpha \widehat{v}.$$

Raționmentul se continuă cu termenii de grad $l - 1$ s.a.m.d.

Pasul 3: Cu polinomul q de la Pasul 2 și folosind inegalitatea de la Pasul 1 avem:

$$\begin{aligned} \inf_{p \in \widehat{\mathbb{P}}_l} \|\widehat{v} + p\|_{l+1, \widehat{K}} &\leq \|\widehat{v} + q\|_{l+1, \widehat{K}} \leq \\ &\leq C \left(|\widehat{v} + q|_{l+1, \widehat{K}}^2 + \sum_{|\alpha| \leq l} \left(\int_{\widehat{K}} D^\alpha (\widehat{v} + q) \right)^2 \right)^{1/2} = \\ &= C |\widehat{v} + q|_{l+1, \widehat{K}} = C |\widehat{v}|_{l+1, \widehat{K}}. \end{aligned}$$

Demonstrația lemei se încheie. ■

Observația 5.4.4 Cum $|p|_{l+1, \widehat{K}} = 0$ pentru orice $p \in \widehat{\mathbb{P}}_l$, rezultă că

$$(5.21) \quad |\widehat{v} + p|_{l+1, \widehat{K}} = |\widehat{v}|_{l+1, \widehat{K}}, \quad \forall \widehat{v} \in H^{l+1}(\widehat{K}).$$

Obținem că

$$(5.22) \quad |\widehat{v}|_{l+1, \widehat{K}} \leq \inf_{p \in \widehat{\mathbb{P}}_l} \|\widehat{v} + p\|_{l+1, \widehat{K}}, \quad \forall \widehat{v} \in H^{l+1}(\widehat{K}).$$

Inegalitățile (5.22) și (5.18) din lema 5.4.4 ne arată că $|\widehat{v}|_{l+1, \widehat{K}}$ este o normă pe spațiul $K^{l+1}(\widehat{K})/\widehat{\mathbb{P}}_l$ echivalentă cu norma canonică:

$$(5.23) \quad |\widehat{v}|_{l+1, \widehat{K}} \sim \inf_{p \in \widehat{\mathbb{P}}_l} \|\widehat{v} + p\|_{l+1, \widehat{K}}, \quad \forall \widehat{v} \in H^{l+1}(\widehat{K}).$$

□

Vom da acum primul rezultat de interpolare în $\widehat{K}$.

Teorema 5.4.1 *Fie $N \leq 3$ și $\hat{K} \subset \mathbb{R}^N$ un compact conex de interior nevid și cu frontieră C^1 pe porțiuni iar $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ un element finit Lagrange cu proprietatea că există $k \geq 1$ astfel ca*

$$(5.24) \quad \hat{\mathbb{P}}_k \subseteq \hat{P} \subset H^{k+1}(\hat{K}).$$

Pentru orice $s \geq 2$ și $0 \leq m \leq l = \min\{k+1, s\} \geq 2$ există o constantă pozitivă $C = C(\hat{K}, \Pi_{\hat{K}}, k, m, s, N)$ astfel încât

$$(5.25) \quad |\hat{v} - \Pi_{\hat{K}} \hat{v}|_{m, \hat{K}} \leq C |\hat{v}|_{l, \hat{K}}, \quad \forall \hat{v} \in H^s(\hat{K}).$$

Demonstrație: Vom considera următoarele cazuri:

1. *Cazul $k+1 > s$. Rezultă că $l = s$ și $I - \Pi_{\hat{K}}$ este continuu și liniar din $H^m(\hat{K})$ în $H^s(\hat{K})$. Folosind lemele 5.4.3 și 5.4.4, se obține:*

$$\begin{aligned} |\hat{v} - \Pi_{\hat{K}} \hat{v}|_{m, \hat{K}} &\leq \|I - \Pi_{\hat{K}}\|_{\mathcal{L}(H^s, H^m)} \inf_{p \in \hat{\mathbb{P}}_l} \|\hat{v} - p\|_{s, \hat{K}} \leq \\ &\leq C \|I - \Pi_{\hat{K}}\|_{\mathcal{L}(H^s, H^m)} |\hat{v}|_{s, \hat{K}} = C |\hat{v}|_{l, \hat{K}}. \end{aligned}$$

2. *Cazul $k+1 \leq s$. Rezultă că $l = k+1$ și $I - \Pi_{\hat{K}}$ este continuu și liniar din $H^m(\hat{K})$ în $H^{k+1}(\hat{K})$. Folosind din nou lemele 5.4.3 și 5.4.4, se obține:*

$$\begin{aligned} |\hat{v} - \Pi_{\hat{K}} \hat{v}|_{m, \hat{K}} &\leq \|I - \Pi_{\hat{K}}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}, H^m)} \inf_{p \in \hat{\mathbb{P}}_l} \|\hat{v} - p\|_{k+1, \hat{K}} \leq \\ &\leq C \|I - \Pi_{\hat{K}}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}, H^m)} |\hat{v}|_{k+1, \hat{K}} = C |\hat{v}|_{l, \hat{K}}. \end{aligned}$$

Teorema este demonstrată. ■

Teorema 5.4.1 ne permite să demonstrăm principalul rezultat de interpolare în K . El va fi utilizat în capitolul următor pentru evaluarea erorii în metoda elementului finit.

Teorema 5.4.2 *În condițiile din teorema 5.4.1, fie (K, Σ, P) un element finit Lagrange, afin echivalent cu $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$. Pentru orice $s \geq 2$ și $0 \leq m \leq l = \min\{k+1, s\} \geq 2$ există o constantă pozitivă $C = C(\hat{K}, \Pi_{\hat{K}}, k, m, s, N)$ astfel încât*

$$(5.26) \quad |v - \Pi_K v|_{m, K} \leq C \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right)^m h_K^{l-m} |v|_{l, K}, \quad \forall v \in H^s(K).$$

Demonstrație: Folosind lema 5.4.1, deducem că

$$|v - \Pi_K v|_{m,K} \leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\hat{v} - \Pi_{\hat{K}} \hat{v}|_{m,\hat{K}}.$$

Aplicând teorema 5.4.1 și din nou lema 5.4.1, deducem că

$$\begin{aligned} C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\hat{v} - \Pi_{\hat{K}} \hat{v}|_{m,\hat{K}} &\leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\hat{v}|_{l,\hat{K}} \leq \\ &\leq C \|B^{-1}\|^m \|B\|^l |v|_{l,K}. \end{aligned}$$

În sfârșit, din lema 5.4.2 rezultă că

$$C \|B^{-1}\|^m \|B\|^l |v|_{l,K} \leq C \left(\frac{\hat{h}}{\rho_K} \right)^m \left(\frac{h_K}{\hat{\rho}_K} \right)^l |v|_{l,K} = C \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right)^m h^{l-m} |v|_{l,K}$$

și (5.26) este demonstrată. ■

Observația 5.4.5 Din relația (5.26) deducem că $|v - \Pi_K v|_{m,K}$ tinde la zero cu viteza h_K^{l-m} când h_K tinde la zero dacă $\frac{h_K}{\rho_K}$ rămâne mărginit uniform. Diferența dintre v și $\Pi_K v$ depinde de regularitatea s a funcției v și de gradul k al polinoamelor de interpolare folosite. Cu cât s și k sunt mai mari, cu atât eroarea în interpolare este mai mică. □

5.5 Exerciții

1. Demonstrați că elementele finite date ca exemplu în secțiunile 5.2 și 5.3 verifică proprietatea de unisolență.
2. Fie (K, Σ, P) un element finit Lagrange și $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ funcțiile din bază. Demonstrați că $\sum_{i=1}^d \varphi_i = 1$ dacă și numai dacă funcțiile constante aparțin lui P .
3. Fie $\hat{K}$ prisma unitate din $\mathbb{R}^3$ de vârfuri $(a_i)_{1 \leq i \leq 6}$. Demonstrați că dacă P este spațiul polinoamelor de forma $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) x_3$ atunci $\Sigma = \{a_i : 1 \leq i \leq 6\}$ este P -unisolență.
4. Fie K un n -simplex din $\mathbb{R}^n$ și k un număr întreg. Notăm prin Π operatorul proiecție ortogonală a lui $L^2(K)$ pe spațiul $\mathbb{P}_k$. Demonstrați că există o constantă $C > 0$ care depinde doar de n și k cu proprietatea că, pentru orice $1 \leq m \leq k+1$, avem că

$$|v - \Pi v|_{m,K} \leq c \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}.$$

Capitolul 6

Metoda elementului finit

Vom expune în acest capitol principiile de bază și vom analiza convergența metodei elementului finit. Ea este o metodă din clasa celor descrise în secțiunea 4.1, care se caracterizează printr-o alegere specială a spațiilor V_h . Pentru expunerea metodei vom considera o problemă eliptică de ordin doi, de tipul celor prezentate în secțiunea 3.2.

Fie $N \leq 3$ și $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis mărginit. Pentru început, vom considera că Ω este un deschis poliedric. Reamintim că un deschis poliedric este o reuniune finită de poliedre. În ultima secțiune a acestui capitol vom analiza cazul deschișilor nepoliedrici. Presupunerea $N \leq 3$ acoperă cele mai relevante cazuri din punct de vedere practic și va simplifica unele raționamente.

De asemenea, fie $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, o parte a frontierei lui Ω de măsură nenulă, $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ și $f \in L^2(\Omega)$.

Cu notațiile din secțiunea 3.2, considerăm problema variațională

$$(6.1) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V = H_{\Gamma_0}^1$$

unde

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0 u \varphi \right) dx, \quad L(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Am văzut în teorema 3.2.1 că a este o formă biliniară, continuă, simetrică și coercivă iar L este liniară și continuă în V . Din teorema Lax-Milgram rezultă că ecuația variațională (6.1) are o soluție unică $u \in V$.

Ne propunem în continuare să descriem metoda elementului finit care să permită aproximarea soluției lui (6.1). Pentru început vom determina, pentru fiecare $h > 0$, subspațiul $V_h \subset V$ de dimensiune finită apoi vom

construi o bază în V_h care să fie în concordanță cu cerințele enunțate la sfârșitul secțiunii 4.1. În final vom studia convergența metodei.

6.1 Triangulații

Primul pas în obținerea spațiilor de aproximații V_h constă din construirea unei triangulații a domeniului Ω . Reamintim că Ω este un deschis poliedric mărginit din $\mathbb{R}^N$, cu $N \leq 3$.

Definiția 6.1.1 *O familie $\mathcal{T}_h$ de poliedre K de interior nevid este o **triangulație a domeniului Ω** dacă sunt îndeplinite următoarele condiții*

1. $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$
2. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ pentru orice $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, $K_1 \neq K_2$.
3. Orice față a unui poliedru $K_1 \in \mathcal{T}_h$ este sau față a altui poliedru $K_2 \in \mathcal{T}_h$ (caz în care K_1 și K_2 se numesc adiacente) sau parte a lui Γ_0 sau parte a lui Γ_1
4. Parametrul h din simbolul pentru triangulație este dat de

$$(6.2) \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K).$$

Fiecărui poliedru K din triangulația $\mathcal{T}_h$ îi asociem un element finit Lagrange (K, Σ_K, P_K) . Definim acum următoarele spații

$$(6.3) \quad \begin{aligned} X_h &= \{v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : v|_K \in P_K, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \\ X_{0h} &= \left\{v \in X_h : v|_{\Gamma_0} = 0\right\}. \end{aligned}$$

O primă și foarte importantă proprietate a spațiilor X_h și X_{0h} este cuprinsă în următoarea teoremă:

Teorema 6.1.1 *Dacă $P_K \subset H^1(K)$ pentru orice $K \in \mathcal{T}_h$, atunci*

$$(6.4) \quad X_h \subset H^1(\Omega),$$

$$(6.5) \quad X_{0h} \subset H_{\Gamma_0}^1(\Omega).$$

Demonstrație: Cum $v \in X_h$ rezultă că $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$. Pe de altă parte, definim $v_i \in L^2(\Omega)$ prin

$$v_i|_K = \frac{\partial v|_K}{\partial x_i} \in L^2(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Demonstrăm că, în sensul distribuțiilor,

$$(6.6) \quad v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Într-adevăr, fie $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Avem că

$$\begin{aligned} \langle v_i, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} v_i(x) \varphi(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{\partial v|_K}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{\partial K} v(x) \varphi(x) \nu_i dx - \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) v(x) dx \right) = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v(x) \varphi(x) \nu_i dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) v(x) dx = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v(x) \varphi(x) \nu_i dx - \langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle. \end{aligned}$$

Să privim mai îndeaproape termenul

$$(6.7) \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v(x) \varphi(x) \nu_i dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{K' \text{ față a lui } K} \int_{K'} v(x) \varphi(x) \nu_i dx$$

și să observăm că putem avea două cazuri:

1. K' este parte a frontierei lui Ω , caz în care $\int_{K'} v(x) \varphi(x) \nu_i dx = 0$ deoarece $\varphi|_{K'} = 0$.
2. K' este față comună a două poliedre din triangulație. În acest caz vom avea în suma (6.7) exact două integrale pe K' care se anulează reciproc deoarece $v\varphi$ este o funcție continuă iar semnele normalelor vor fi opuse.

Obținem că $\langle v_i, \varphi \rangle = -\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$ și (6.6) este demonstrată. Prin urmare are loc incluziunea (6.4).

Pentru (6.5) vom observa mai întâi că $X_{0h} \subset X_h \subset H^1(\Omega)$. Pe de altă parte, dacă $v \in X_{0h}$ rezultă că $v|_{\Gamma_0} = 0$ și prin urmare $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ ceea ce demonstrează (6.5). ■

6.2 Spațiile V_h în metoda elementului finit

Pentru aproximarea soluției u a lui (6.1) vom alege

$$(6.8) \quad V_h = X_{0h}$$

și vom utiliza în continuare metoda de aproximare descrisă în secțiunea 4.1.

Astfel, caracteristica metodei elementului finit constă din alegerea (6.8) care presupune parcurgerea a trei etape

- Construirea unei triangulații $\mathcal{T}_h$ a domeniului Ω pe care trebuie rezolvată ecuația
- Alegerea unei familii de elemente finite $(K, \Sigma_K, P_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ corespunzătoare triangulației.
- Considerarea unui spațiu V_h format din funcții care, pe fiecare element K al triangulației, sunt elemente din P_K .

Aproximarea se va face apoi după metoda expusă în secțiunea 4.1. În V_h vom considera problema

$$(6.9) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_h$$

care are o soluție unică $u_h \in V_h$.

Pentru a transforma (6.9) într-un sistem de ecuații liniare, este nevoie de o bază în V_h . Fără ipoteze suplimentare asupra elementelor finite considerate nu este ușor de determinat o astfel de bază. În plus, am dori să obținem elementele din V_h prin interpolarea funcțiilor continue din $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dacă toate elementele din V_h s-ar obține prin interpolare, construcția unei baze ar deveni imediată, așa după cum vom demonstra mai departe, în teorema 6.2.2.

Vom defini operatorul de interpolare $\Pi_h : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\Omega)$ prin

$$(6.10) \quad \Pi_h(v)|_K = \Pi_K(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

unde Π_K este operatorul de interpolare în K definit prin (5.3).

Să observăm că, pentru orice $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Pi_h v$ este bine definită ca funcție din $L^2(\Omega)$, dar poate să nu fie o funcție (continuă) din X_h . Într-adevăr, deși

$$(\Pi_h v)|_K = \Pi_K v \in P_K \subset \mathcal{C}(K),$$

$\Pi_h v$ poate fi multivaluată pe frontierele mulțimilor K . Pentru a corecta acest defect ar trebui să putem asigura că, pentru orice două elemente adiacente K_1 și K_2 cu fața comună K' , avem

$$(\Pi_{K_1} v)|_{K'} = (\Pi_{K_2} v)|_{K'}.$$

Pentru a garanta acest lucru vom considera că familia de elemente finite $(K, \Sigma_K, P_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ verifică următoarele condiții:

- **Condiții de compatibilitate:** Pentru orice pereche (K_1, K_2) de poliedre adiacente din $\mathcal{T}_h$ cu fața comună K' , avem că

$$C1. (P_{K_1})|_{K'} = (P_{K_2})|_{K'},$$

$$C2. \Sigma_{K_1} \cap K' = \Sigma_{K_2} \cap K'.$$

- **Condiții de clasă zero:** Fiecare element finit (K, Σ_K, P_K) satisface

$$C3. P_K \subset \mathcal{C}(K) \cap H^1(K)$$

$$C4. \text{ Dacă } K' \text{ este o față a lui } K \text{ iar } P' = \{\varphi|_{K'} : p \in P_K\} = (P_K)|_{K'} \text{ atunci mulțimea } \Sigma \cap K' \text{ este } P' \text{-unisolventă.}$$

- **Condiții pe frontieră:**

$$C5. \Gamma_0 \text{ este o reuniune de fețe de poliedre din triangulație.}$$

Suntem acum în măsură să dăm o caracterizare a spațiilor V_h .

Teorema 6.2.1 *Fie $\mathcal{T}_h$ o triangulație a lui Ω și $(K, \Sigma_K, P_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ o familie de elemente finite asociate care satisfac condițiile C1. – C5. Atunci*

$$(6.11) \quad X_h = \{\Pi_h v : v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})\},$$

$$(6.12) \quad X_{0h} = \left\{ \Pi_h v : v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), v|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Demonstrație: Vom demonstra prin dublă incluziune că $S = X_h$ unde

$$S = \{\Pi_h v : v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})\}.$$

Dat $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, arătăm că $\Pi_h v \in X_h$. Cum $(\Pi_h v)|_K = \Pi_K v \in P_K$, prin definiția lui Π_K , mai rămâne de demonstrat că $\Pi_h v$ este o funcție continuă în $\overline{\Omega}$. Deoarece $P_K \subset \mathcal{C}(K)$ (din C3), mai trebuie să arătăm că, pentru orice pereche (K_1, K_2) de poliedre adiacente din $\mathcal{T}_h$, cu fața comună K' , avem

$$(6.13) \quad (\Pi_{K_1} v)|_{K'} = (\Pi_{K_2} v)|_{K'}.$$

Definim $w = (\Pi_{K_1} v)|_{K'} - (\Pi_{K_2} v)|_{K'}$ și observăm că $w \in (P_{K_1})|_{K'} = (P_{K_2})|_{K'}$ (din C1).

Pentru orice $a \in \Sigma_{K_1} \cap K' = \Sigma_{K_2} \cap K'$ (din C2) avem că $w(a) = 0$ deoarece $\Pi_{K_1} v(a) = \Pi_{K_2} v(a) = v(a)$.

Cum însă $\Sigma_{K_1} \cap K'$ este $(P_{K_1})|_{K'}$ – unisolventă (din C4), obținem că $w = 0$ pe K' și prin urmare (6.13) este adevărată. Cu aceasta am demonstrat că $S \subseteq X_h$.

Fie acum $v \in X_h$. Rezultă că $v|_K \in P_K$ și prin urmare $\Pi_K v = v|_K$. Cum acest lucru este adevărat pentru fiecare $K \in \mathcal{T}_h$ obținem că

$$v = \Pi_h v.$$

Ținând cont că $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, rezultă că $v \in S$. Prin urmare am demonstrat și că $X_h \subseteq S$. În concluzie, $X_h = S$.

Pentru (6.12) vom observa că

$$X_{0h} = \{v \in X_h : v|_{\Gamma_0} = 0\} = \left\{ \Pi_h v : v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), v|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$$

și demonstrația se încheie. ■

Vom nota

$$\Sigma = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K, \quad \Sigma_{\Gamma_0} = \Sigma \setminus \Gamma_0$$

și vom renumera nodurile astfel ca

$$\Sigma_{\Gamma_0} = \{a_1, a_2, \dots, a_{I_0}\}, \quad \Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_{I_0}, a_{I_0+1}, \dots, a_I\}.$$

Observația 6.2.1 *Teorema 6.2.1 ne arată cum se pot construi funcțiile din X_h . Să presupunem că avem dată câte o valoare reală α_i pentru fiecare nod din Σ . Există o funcție continuă v (un polinom de interpolare, de exemplu) care este definită în Ω și care are proprietatea că $v(a_i) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq I$. Pe fiecare element K din triangulație se construiește funcția $\Pi_K v$ din P_K care ia aceleași valori ca v în nodurile din $\Sigma \cap K$. Funcția obținută prin “asamblarea” tuturor acestor restricții este $\Pi_h v$ și aparține lui X_h conform teoremei 6.2.1. □*

Observația 6.2.2 *Funcțiile din X_h sunt unic determinate de valorile lor în Σ . Într-adevăr, dacă v_1 și v_2 sunt două funcții din X_h care coincid în Σ , atunci $v_1 = v_2$ pe fiecare element K din triangulație, datorită proprietății de unisolvență. □*

Suntem acum în măsură să demonstrăm existența unei baze în X_h .

Teorema 6.2.2 *În ipotezele teoremei 6.2.1, există o bază $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ a lui X_h cu proprietatea că*

$$(6.14) \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq I.$$

În același timp, $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I_0}$ este o bază a lui X_{0h} .

Demonstrație: Pentru fiecare $1 \leq i \leq I$, există o funcție continuă $w_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ cu proprietatea că $w_i(a_j) = \delta_{ij}$ pentru fiecare $1 \leq j \leq I$. Un exemplu de astfel de funcție este polinomul

$$w_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^I \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Considerăm acum funcția $\varphi_i = \Pi_h w_i$ care, conform teoremei 6.2.1, aparține lui X_h . Avem că

$$\varphi_i(a_j) = \Pi_h w_i(a_j) = w_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq I.$$

Observați că φ_i cu proprietățile de mai sus este unică.

Demonstrăm acum că $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ este o bază a lui X_h . Într-adevăr, $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ este liniar independentă deoarece

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i \varphi_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^I \alpha_i \varphi_i \right)(a_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq I \Rightarrow \alpha_j = 0, \quad 1 \leq j \leq I.$$

De asemenea, $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ este un sistem de generatori deoarece, pentru orice $w \in X_h$,

$$w = \sum_{i=1}^I w(a_i) \varphi_i.$$

Această ultimă relație este adevărată pentru că suma din dreapta este o funcție din X_h care ia aceleași valori ca și w în nodurile din Σ .

Prin urmare $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ este o bază a lui X_h .

Pentru a demonstra că $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I_0}$ este o bază a lui X_{0h} să notăm că $\varphi_i \in X_{0h}$ pentru orice $1 \leq i \leq I_0$. Acest lucru este o consecință a ipotezelor C4 și C5, care asigură că orice funcție din X_h care se anulează în punctele a_i , $I_0 + 1 \leq i \leq I$ este zero pe Γ_0 . ■

Observația 6.2.3 Dacă φ_i este una dintre funcțiile date de teorema 6.2.2, $\varphi_i|_K$ este o funcție din baza canonică a lui P_K pentru fiecare element K din triangulație. □

Observația 6.2.4 Funcțiile φ_i nu numai că sunt extrem de simple și ușor de construit, dar au și următoarea proprietate foarte importantă, caracteristică metodei elementului finit,

$$\text{supp}(\varphi_i) = \cup \{K \in \mathcal{T}_h : a_i \in K\}.$$

Această proprietate ne arată că suportul unei funcții φ_i este localizat în jurul punctului a_i ceea ce are drept consecință faptul că $a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ pentru majoritatea valorilor lui j . Astfel, matricile rezultate prin aplicarea metodei, ale căror elemente sunt tocmai $a(\varphi_i, \varphi_j)$, vor avea foarte multe elemente egale cu zero (matrici rare). Prin urmare, rezolvarea sistemelor liniare rezultate va fi mult ușurată tocmai de această alegere a bazei. Se realizează astfel unul dintre dezideratele enunțate la sfârșitul secțiunii 4.1.

□

6.3 Convergența metodei elementului finit

Vom demonstra în cele ce urmează convergența metodei elementului finit și vom da o estimare a erorii în aproximare. Ca și mai înainte, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$, este un deschis poliedric mărginit. Convergența depinde de alegerea spațiilor V_h , care la rândul lor sunt determinate pe de o parte de triangulațiile considerate și de elementele finite folosite iar pe de altă parte de îndeplinirea condițiilor C1-C5. Pentru asigurarea convergenței metodei vom considera o familie specială de triangulații.

Definiția 6.3.1 *O familie de triangulații ale domeniului Ω , $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$, este regulată dacă următoarele condiții sunt verificate*

1. Fiecărei triangulații $\mathcal{T}_h$ îi este asociată o familie de elemente finite

$$(K, \Sigma_K, P_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$$

afin echivalente cu un element finit de referință $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ care verifică C3-C4.

2. Pentru fiecare pereche de fețe $(\widehat{K}'_1, \widehat{K}'_2)$ ale lui $\widehat{K}$ și orice aplicație F afină, inversabilă în $\mathbb{R}^N$ și cu proprietatea că $F(\widehat{K}'_1) = \widehat{K}'_2$ avem că

$$\widehat{\Sigma} \cap \widehat{K}'_2 = F(\widehat{\Sigma} \cap \widehat{K}'_1),$$

$$\left\{ p|_{\widehat{K}'_2} : p \in \widehat{P} \right\} = \left\{ p \circ F|_{\widehat{K}'_1} : p \in \widehat{P} \right\}.$$

3. Fiecare triangulație $\mathcal{T}_h$ verifică C5.

4. Dacă $h_K = \text{diam}(K)$ avem că

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \rightarrow 0.$$

5. Există $\sigma \geq 1$, independentă de h , astfel încât

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

unde ρ_K este dat de (5.9).

Observația 6.3.1 Condițiile 4-5 din Definiția 6.3.1 se referă la geometria triangulațiilor. Condiția 4 cere ca diametrul poliedrelor din triangulațiile $\mathcal{T}_h$ să tindă la zero iar condiția 5 arată că elementele din triangulație nu degenerază când h tinde la zero. $\square$

O proprietate importantă a triangulațiilor regulate este dată de rezultatul următor.

Propoziția 6.3.1 Fie $\mathcal{T}_h$ o triangulație a domeniului Ω și $(K, \Sigma_K, P_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ o familie de elemente finite asociate care verifică 1-2 din Definiția 6.3.1. Atunci sunt satisfăcute condițiile C1-C4.

Demonstrație: Fie o pereche (K_1, K_2) de poliedre din $\mathcal{T}_h$ adiacente cu fața comună K' și fie F_1 respectiv F_2 aplicațiile afine prin care ele se obțin din elementul de referință $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$. Avem că

$$\begin{aligned} (P_{K_1})|_{K'} &= \{p|_{K'} : p \in P_{K_1}\} = \left\{p|_{F_1(\hat{K}'_1)} : p \in P_{K_1}\right\} = \\ &= \left\{\hat{p} \circ F_1^{-1}|_{F_1(\hat{K}'_1)} : \hat{p} \in \hat{P}\right\} = \left\{\hat{p} \circ F_1^{-1}|_{F_2(\hat{K}'_2)} : \hat{p} \in \hat{P}\right\} = \\ &= \left\{\hat{p} \circ (F_1^{-1} \circ F_2)|_{\hat{K}'_2} : \hat{p} \in \hat{P}\right\} = \left\{\hat{p}|_{\hat{K}'_2} : \hat{p} \in \hat{P}\right\} = \\ &= \left\{\hat{p} \circ F_2^{-1}|_{F_2(\hat{K}'_2)} : \hat{p} \in \hat{P}\right\} = \left\{p|_{F_2(\hat{K}'_2)} : p \in P_{K_2}\right\} = \\ &= \{p|_{K'} : p \in P_{K_2}\} = (P_{K_2})|_{K'} \end{aligned}$$

și C1 se verifică. Din

$$\begin{aligned} \Sigma_{K_1} \cap K' &= F_1(\hat{\Sigma}) \cap F_1(\hat{K}'_1) = F_1(\hat{\Sigma} \cap \hat{K}'_1) = \\ &= F_1 \circ (F_1^{-1} \circ F_2)(\hat{\Sigma} \cap \hat{K}'_2) = F_2(\hat{\Sigma} \cap \hat{K}'_2) = \Sigma_{K_2} \cap K' \end{aligned}$$

rezultă că și C2 se verifică.

Fie acum un element finit (K, Σ_K, P_K) și fie F aplicația afină prin care se obține din elementul de referință. Cum $\hat{P} \subset \mathcal{C}(\hat{K}) \cap H^1(K)$ rezultă că $P_K = \hat{P} \circ F^{-1}$ verifică C3.

Pe de altă parte, dacă K' este o față a lui K iar $P' = \{p|_{K'} : p \in P_K\}$, mulțimea $\Sigma \cap K'$ este P' -unisolventă deoarece $F^{-1}(\Sigma \cap K')$ este $P' \circ F^{-1}$ -unisolventă și C4 se verifică. ■

Suntem acum în măsură să arătăm convergența a metodei elementului finit.

Teorema 6.3.1 *Fie $N \leq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis poliedric mărginit și $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ o familie regulată de triangulații ale lui Ω asociată unui element finit de referință $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ cu proprietatea că există $k \geq 1$ astfel încât*

$$(6.15) \quad \hat{\mathbb{P}}_k \subset \hat{P} \subset H^1(K).$$

Atunci metoda elementului finit converge, adică soluția u_h a problemei (6.9) converge la soluția u a problemei (6.1)

$$(6.16) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0.$$

În plus, dacă $u \in H^{l+1}(\Omega)$, $1 \leq l \leq k$, există o constantă pozitivă $C > 0$, independentă de h , astfel încât

$$(6.17) \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^l \|u\|_{l+1,\Omega}.$$

Demonstrație: Vom începe prin considerarea cazului $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Cum pentru orice $N \leq 3$, $l+1 \geq 2 > N/2$ rezultă că $H^{l+1} \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Prin urmare $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ și $\Pi_h u \in V_h$. Conform teoremei 4.3.2, există o constantă pozitivă $C_1 > 0$ astfel ca

$$(6.18) \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}.$$

Folosind teorema 5.4.2 cu $s = 2$ și $m = 0$ sau $m = 1$, deducem că

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,K} \leq C_2 \frac{h_K^{l+1}}{\rho_K} \|u\|_{l+1,K}$$

și

$$\|u - \Pi_h u\|_{0,K} \leq C_3 h_K^{l+1} \|u\|_{l+1,K}.$$

Cum familia de triangulații este regulată, rezultă că $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$ și prin urmare

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,K} \leq \|u - \Pi_h u\|_{1,K} + \|u - \Pi_h u\|_{0,K} \leq$$

$$\leq \max\{C_2\sigma, C_3h_K\}h_K^l \|u\|_{l+1,K}.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_K u\|_{1,K}^2 \leq \\ &\leq \max\{C_2^2\sigma^2, C_3^2h^2\}h^{2l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{l+1,K}^2 = \max\{C_2^2\sigma^2, C_3^2h^2\}h^{2l} \|u\|_{l+1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

și prin urmare

$$(6.19) \quad \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}^2 \leq \max\{C_2^2\sigma^2, C_3^2h^2\}h^{2l} \|u\|_{l+1,\Omega}^2.$$

Din (6.18) și (6.19) se obține (6.17) cu $C = C_1 \max\{C_2\sigma, C_3h\}$.

Pentru a demonstra convergența metodei în cazul în care $u \notin H^{l+1}(\Omega)$, vom aplica teorema 4.3.3 (vezi și observația 4.3.4), cu $\mathcal{V} = H^{l+1}(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, $r_h = \Pi_h$. Rezultatul se obține ținând cont că $\mathcal{V}$ este dens în V și, după cum am văzut mai sus,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} = 0$$

pentru orice $u \in \mathcal{V}$. ■

În teorema următoare dăm două exemple de familii de elemente finite care verifică ipotezele teoremei 6.3.1.

Teorema 6.3.2 *Fie $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ o familie regulată de triangulații ale domeniului Ω , asociată unui N -simplex de tip k sau unui N -paralelotope de tip k . Dacă $N \leq 3$ și $k \geq 1$, atunci metoda elementului finit converge.*

În plus, dacă $u \in H^{l+1}(\Omega)$ și $1 \leq l \leq k$, există o constantă $C > 0$, independentă de h , astfel încât

$$(6.20) \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^l \|u\|_{l+1,\Omega}.$$

Teorema 6.3.1 estimează diferența dintre u și u_h în norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. În cele ce urmează ne propunem să evaluăm eroarea și în norma $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. Avem însă nevoie de o ipoteză în plus.

Vom considera următoarea problemă: pentru fiecare $g \in L^2(\Omega)$, fie $v \in V$ unica soluție a problemei

$$(6.21) \quad a(v, \varphi) = \int_{\Omega} g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V,$$

unde a este forma biliniară din (6.1).

Definiția 6.3.2 Problema (6.21) este **regulată** dacă aplicația care asociază fiecărui g soluția v a lui (6.21) este liniară și continuă din $L^2(\Omega)$ în $H^2(\Omega)$ adică există $C > 0$ astfel încât

$$(6.22) \quad \|v\|_{2,\Omega} \leq C\|g\|_{0,\Omega}, \quad \forall g \in L^2(\Omega).$$

În condițiile unei probleme regulate avem următoarea proprietate.

Teorema 6.3.3 În ipotezele teoremei 6.3.1 și presupunând că problema (6.21) este regulată, există o constantă $C > 0$ independentă de h astfel încât, dacă $u \in H^{k+1}(\Omega)$, atunci

$$(6.23) \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1}\|u\|_{k+1,\Omega}.$$

Demonstrație: Avem că

$$(6.24) \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (u - u_h)g dx}{\|g\|_{0,\Omega}}.$$

Dat $g \in L^2(\Omega)$ fie $v \in V \cap H^2(\Omega)$ soluția problemei (6.21). Cum $u - u_h \in V$ avem că

$$(6.25) \quad a(v, u - u_h) = \int_{\Omega} g(u - u_h) dx.$$

Pe de altă parte, pentru orice funcție $\varphi_h \in V_h$, avem că

$$\int_{\Omega} g(u - u_h) dx = a(u - u_h, v - \varphi_h) \leq C\|u - u_h\|_{1,\Omega}\|v - \varphi_h\|_{1,\Omega}.$$

Cum $v \in H^2(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ (deoarece $N \leq 3$), putem lua $\varphi_h = \Pi_h v \in V_h$. Ținând cont de estimarea (6.19) de eroare în interpolare și de (6.22) obținem că

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch\|v\|_{2,\Omega} \leq Ch\|g\|_{0,\Omega}.$$

Prin urmare

$$\int_{\Omega} g(u - u_h) dx \leq Ch\|u - u_h\|_{1,\Omega}\|g\|_{0,\Omega}$$

și, din (6.24),

$$(6.26) \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch\|u - u_h\|_{1,\Omega}$$

Relația (6.23) se obține folosind (6.26) și estimăția de eroare (6.17) din teorema 6.3.1. ■

Observația 6.3.2 *Problemele Dirichlet sau Neumann sunt exemple de probleme regulate. Acest lucru este o consecință a proprietății de regularitate eliptică a acestor probleme (vezi [4]). În cazul problemei noastre, care este una mixtă Dirichlet-Neumann, acest lucru nu mai este garantat. $\square$*

6.4 Domenii nepoligonale

Vom analiza în cele ce urmează cazul domeniilor $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$, nepoligonale. În acest caz nu este posibilă găsirea unei triangulații formate din poligoane care să se constituie într-o partiție a întregului domeniu.

Ideea este aceea de a considera un șir de “aproximații” ale domeniului Ω prin domenii poligonale, $(\Omega_h)_{h>0}$. Apoi, pentru fiecare Ω_h , se va considera o triangulație care va conduce la rezolvarea numerică a problemei pe acest domeniu. Presupunând că aproximarea lui Ω prin Ω_h este din ce în ce mai bună iar triangulațiile folosite sunt din ce în ce mai fine când h tinde la zero, vom demonstra că soluțiile problemelor pe domeniile aproximative Ω_h converg la soluția problemei pe domeniul inițial Ω .

Pentru a ușura expunerea și înțelegerea ideilor ne vom limita la analiza cazului unui domeniu mărginit convex $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a cărui frontieră $\partial\Omega = \Gamma$ este 2-regulată. În plus, vom considera ecuația eliptică

$$(6.27) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ecuația (6.27) se va scrie în forma variațională

$$(6.28) \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V = H_0^1(\Omega).$$

După cum știm deja, (6.28) are o soluție unică $u \in H_0^1(\Omega)$.

Fie acum Ω_h un domeniu poligonal din $\mathbb{R}^2$ cu proprietatea că

$$\Omega_h \subset \Omega.$$

Vom nota prin Γ_h frontiera lui Ω_h și vom considera că vârfurile lui Γ_h se găsesc pe Γ .

Fie $\mathcal{T}_h$ o triangulație a lui Ω_h având toate proprietățile din teorema 6.3.1 și care în plus verifică:

1. $\mathcal{T}_h$ este formată din triunghiuri K de diametru $h_K \leq h$

2. Intersecția fiecărui triunghi K cu Γ_h este formată din cel mult o față a lui K
3. Dacă K are o față K' în comun cu Γ_h atunci K' este, de asemenea, față a lui Γ_h .

Cum Ω este convex,

$$\bar{\Omega}_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K \subset \Omega.$$

Definim spațiile

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_h) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in \widehat{\mathbb{P}}_1, v|_{\partial\Omega_h} = 0 \right\}$$

$$\tilde{V}_h = \left\{ v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \mid v|_{\Omega_h} \in V_h, v|_{\Omega \setminus \Omega_h} = 0 \right\}$$

Conform teoremelor 6.1.1 și 2.5.2, $V_h \subset H_0^1(\Omega_h)$ și $\tilde{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Fie $u_h \in V_h$ unica soluție a problemei variaționale pe Ω_h ,

$$(6.29) \quad \int_{\Omega_h} \nabla u_h \nabla \varphi_h dx = \int_{\Omega_h} f \varphi_h dx, \quad \forall \varphi_h \in V_h$$

și $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$ prelungirea prin zero a lui u_h la Ω ,

$$(6.30) \quad \tilde{u}_h(x) = \begin{cases} u_h(x) & x \in \Omega_h, \\ 0 & x \in \Omega \setminus \Omega_h. \end{cases}$$

Lema 6.4.1 *Dacă $u_h \in V_h$ este unica soluție a problemei (6.29) iar $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$ este dată de (6.30) atunci au loc*

$$(6.31) \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \inf_{\tilde{\varphi}_h \in \tilde{V}_h} \|u - \tilde{\varphi}_h\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \tilde{\varphi}_h \in \tilde{V}_h,$$

$$(6.32) \quad \|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega_h)} \leq C_2 \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|_{H_0^1(\Omega_h)}, \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

unde C_1 și C_2 sunt două constante strict pozitive, independente de h .

Demonstrație: Să observăm că $\tilde{V}_h$ este un subspațiu liniar de dimensiune finită al lui $H_0^1(\Omega)$, având aceeași dimensiune ca și V_h . Prin urmare problema variațională

$$(6.33) \quad \int_{\Omega} \nabla \tilde{v}_h \nabla \tilde{\varphi}_h dx = \int_{\Omega} f \tilde{\varphi}_h dx, \quad \forall \tilde{\varphi}_h \in \tilde{V}_h$$

are o soluție unică $\tilde{v}_h \in \tilde{V}_h$. Cum $\tilde{u}_h$ verifică (6.33), rezultă că $\tilde{v}_h = \tilde{u}_h$. Aplicând teorema Cea 4.3.2, obținem imediat (6.31).

Pe de altă parte, din (6.28) și (6.33) deducem că

$$(6.34) \quad \int_{\Omega} \nabla(\tilde{u}_h - u) \nabla \tilde{\varphi}_h dx = 0, \quad \forall \tilde{\varphi}_h \in \tilde{V}_h.$$

Considerând $\tilde{\varphi}_h = \tilde{u}_h$ și ținând cont că $\tilde{u}_h = 0$ în $\Omega \setminus \Omega_h$, obținem că

$$\int_{\Omega_h} \nabla(u_h - u) \nabla u_h dx = 0.$$

Rezultă că, pentru orice $\varphi_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \nabla(u_h - u) \nabla(u_h - u) dx &= - \int_{\Omega_h} \nabla(u_h - u) \nabla u dx = \\ &= \int_{\Omega_h} \nabla(u_h - u) \nabla(\varphi_h - u) dx \end{aligned}$$

unde am folosit faptul că extensia prin zero a lui φ_h a Ω aparține lui $H_0^1(\Omega)$.

Prin urmare

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega_h)}^2 \leq \|u - \varphi_h\|_{H_0^1(\Omega_h)} \|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega_h)}$$

și demonstrația se încheie. ■

Fiind dat $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, vom denota prin $\Pi_h u$ funcția continuă pe $\overline{\Omega}_h$ a cărei restricție la fiecare element K al triangulației $\mathcal{T}_h$ aparține lui $\mathbb{P}_1$ și coincide cu u în nodurile triangulației. Să observăm că, dacă u se anulează pe Γ , atunci $\Pi_h u$ se anulează în vârfurile lui Γ_h . Din proprietatea de unisolență pe fiecare din fețele frontierei, obținem că $\Pi_h u$ se anulează pe Γ_h și prin urmare $\Pi_h u \in V_h$. Să mai observăm că, dacă am fi considerat $\mathbb{P}_k$ cu $k \geq 2$ în loc de $\mathbb{P}_1$, acest lucru nu ar mai fi fost adevărat.

Lema 6.4.2 *Există o constantă pozitivă C , independentă de h , astfel încât, pentru orice funcție $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, are loc*

$$(6.35) \quad \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|_{H_0^1(\Omega_h)} \leq Ch \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) \|u\|_{2,\Omega}.$$

Demonstrație: Fie $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Cum $H^2(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (deoarece dimensiunea spațiului este $N = 2$), avem că $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Așa cum am remarcat deja, $\Pi_h u \in V_h$, și prin urmare

$$\inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|_{H_0^1(\Omega_h)} \leq \|u - \Pi_h u\|_{H_0^1(\Omega_h)}.$$

Folosind teorema de aproximare în interpolare 5.4.2 obținem că, pentru fiecare $K \in \mathcal{T}_h$,

$$|u - \Pi_h u|_{1,K} \leq C \left(\frac{h_K^2}{\rho_K} \right) \|u\|_{2,K}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|_{H_0^1(\Omega_h)} &\leq C \inf_{\varphi_h \in V_h} |u - \varphi_h|_{1,\Omega_h} \leq \\ &\leq C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K^2}{\rho_K} \right) \|u\|_{2,\Omega} \leq Ch \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) \|u\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Demonstrația lemei se încheie. ■

Lema 6.4.2 oferă o estimare a erorii în Ω_h . Pentru a obține o estimare în $\Omega \setminus \Omega_h$ avem nevoie în prealabil de următorul rezultat.

Lema 6.4.3 *Dacă Ω este un domeniu 2-regulat, există o constantă pozitivă C , independentă de h , astfel încât, pentru orice punct $P \in \Gamma_h \cap K$,*

$$(6.36) \quad \text{dist}(P, \Gamma) \leq Ch_K^2,$$

unde h_K este diametrul elementului K din triangulația $\mathcal{T}_h$ a lui Ω .

Demonstrație: Fie $x \in \Gamma_h \cap K$. Notăm prin K' fața comună lui K și Γ_h . Segmentul K' interpoalează liniar arcul de frontieră care-l subîntinde. Pentru a preciza această afirmație și pentru a demonstra (6.36) să presupunem că partea din frontiera Γ delimitată de K' are o parametrizare de forma

$$y = \gamma(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Cum frontiera lui Ω este 2-regulată, funcția γ este de clasă $\mathcal{C}^2$.

Ecuția segmentului K' care unește punctele $(x_1, \gamma(x_1))$ și $(x_2, \gamma(x_2))$ este dată de

$$y = \gamma(x_1) - \frac{\gamma(x_2) - \gamma(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Fie $P \in \Gamma_h \cap K$ de coordonate (x, y) și $Q \in \Gamma$ de coordonate $(x, \gamma(x))$. Avem că

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, \Gamma) &\leq \text{dist}(P, Q) \leq |\gamma(x) - y| = \\ &= \left| \gamma(x) - \gamma(x_1) - \frac{\gamma(x_2) - \gamma(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq C|x_1 - x_2|^2|\gamma''(\xi)| \leq Ch_K^2$$

și demonstrația lemei se încheie. ■

Suntem acum în măsură să evaluăm diferența dintre $\tilde{u}_h$ și u în $\Omega \setminus \Omega_h$.

Lema 6.4.4 *Există o constantă pozitivă C , independentă de h , astfel încât, pentru orice funcție $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, are loc*

$$(6.37) \quad |u|_{1,\Omega \setminus \Omega_h} \leq Ch||u||_{2,\Omega}.$$

Demonstrație: Vom demonstra că există o constantă pozitivă C , independentă de h , astfel încât, pentru orice funcție $v \in H^1(\Omega)$, are loc

$$(6.38) \quad ||v||_{0,\Omega \setminus \Omega_h} \leq C(h||v||_{0,\Gamma} + h^2|v|_{1,\Omega \setminus \Omega_h}).$$

Folosind teorema de urmă 2.4.1, va rezulta că

$$||v||_{0,\Omega \setminus \Omega_h} \leq Ch||v||_{1,\Omega}$$

și (6.37) se va obține considerând $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ și $v = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Pentru demonstrarea lui (6.38) să observăm mai întâi că este suficient să analizăm cazul $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Fie Γ' un arc de frontieră al lui Γ subîntins de K' , o față a unui element K din triangulația $\mathcal{T}_h$. Să presupunem că Γ' are o parametrizare de forma

$$y = \gamma(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Ecuția segmentului K' care unește punctele $(x_1, \gamma(x_1))$ și $(x_2, \gamma(x_2))$ este dată de

$$y = \delta(x) = \gamma(x_1) - \frac{\gamma(x_2) - \gamma(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Fie O_K regiunea delimitată de K' și Γ' . Pentru fiecare $(x, y) \in O_K$,

$$v(x, y) = v(x, \gamma(x)) + \int_{\gamma(x)}^y \frac{\partial v}{\partial y}(x, s) ds$$

ceea ce implică

$$v^2(x, y) \leq 2v^2(x, \gamma(x)) + 2|y - \gamma(y)| \int_{\gamma(x)}^y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2(x, s) ds.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned}
 \int_{O_K} v^2(x, y) dx dy &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{\delta(x)}^{\gamma(x)} v^2(x, y) dy dx \leq \\
 &\leq 2 \int_{x_1}^{x_2} |\gamma(x) - \delta(x)| v^2(x, \gamma(x)) dx + \\
 &+ 2Ch_K^2 \int_{x_1}^{x_2} |\gamma(x) - \delta(x)| \int_{\delta(x)}^{\gamma(x)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 (x, y) dy dx \leq \\
 &\leq Ch_K^2 \left(\int_{\Gamma'} v^2 + \int_{O_K} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right).
 \end{aligned}$$

Inegalitatea (6.37) rezultă prin considerarea fiecărui arc de frontieră Γ' și prin însumarea rezultatelor. ■

Rezultatul următor demonstrează convergența metodei în cazul domeniilor nepoligonale.

Teorema 6.4.1 *Fie Ω un deschis mărginit din $\mathbb{R}^2$, convex și cu frontiera 2-regulată. Fie $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ soluția problemei (6.28) și $\tilde{u}_h \in H_0^1(\Omega)$ dată de (6.29)-(6.30). Dacă $(T_h)_{h>0}$ este o familie de triangulații regulată atunci există o constantă pozitivă C , independentă de h , astfel încât*

$$(6.39) \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{2,\Omega},$$

$$(6.40) \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{2,\Omega}.$$

Observația 6.4.1 *Estimarea (6.40) are loc în cazul unei ecuații eliptice mai generate numai dacă ecuația este regulată (vezi 6.3.2). În cazul nostru acest lucru este adevărat. □*

Demonstrație: În condițiile unei familii de triangulații regulate, din lema 6.4.2 obținem că

$$\inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|_{H_0^1(\Omega_h)} \leq Ch \|u\|_{2,\Omega}.$$

Acum, majorarea (6.39) rezultă din (6.32) și (6.37).

Pentru a demonstra (6.40), vom utiliza aceeași metodă ca în teorema 6.3.3. Pentru fiecare $g \in L^2(\Omega)$, fie $\Lambda(g) \in H_0^1(\Omega)$ soluția problemei (6.28) cu $f = g$. Avem că $\Lambda(g) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ și

$$(6.41) \quad \|\Lambda(g)\|_{2,\Omega} \leq C \|g\|_{0,\Omega}.$$

Dacă $\tilde{v}_h$ este soluția problemei (6.29)-(6.30) cu $f = g$, din (6.39) rezultă că

$$(6.42) \quad \inf_{\varphi_h \in V_h} \|\Lambda(g) - \tilde{\varphi}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\Lambda(g) - \tilde{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch \|\Lambda(g)\|_{2,\Omega}.$$

Folosind (6.42) și (6.41), obținem că

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_h\|_{0,\Omega} &= \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} g(u - \tilde{u}_h) dx}{\|g\|_{0,\Omega}} \leq \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \nabla \Lambda(g) \nabla(u - \tilde{u}_h) dx}{\|g\|_{0,\Omega}} \leq \\ &\leq C \|u - \tilde{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \sup_{g \in L^2(\Omega)} \inf_{\varphi_h \in V_h} \frac{\|\Lambda(g) - \tilde{\varphi}_h\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|g\|_{0,\Omega}} \leq \\ &\leq Ch \|u - \tilde{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

și demonstrația se încheie. ■

6.5 Exerciții

1. Fie Ω un deschis poliedric mărginit din $\mathbb{R}^3$, a o formă biliniară, continuă, simetrică și coercivă în $H^1(\Omega)$ iar L o formă liniară și continuă în $H_0^1(\Omega)$.

- (a) Dacă $u_0 \in H^1(\Omega)$, arătați că există un unic $u \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ cu proprietatea că

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

- (b) Dacă $X_h \subset H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ este un spațiu de elemente finite de clasă zero, notăm $X_{h0} = X_h \cap H_0^1(\Omega)$. Arătați că, pentru orice $u_{h0} \in X_{h0}$ există un unic $u_h \in u_{h0} + X_{0h}$ cu proprietatea că

$$a(u_h, \varphi_h) = L(\varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in X_{0h}.$$

- (c) Demonstrați că are loc estimția

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{\varphi_h \in u_{h0} + X_{0h}} \|u - \varphi_h\|_{1,\Omega}.$$

- (d) Cum trebuie ales u_{h0} astfel încât $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h)$?

2. Dacă K este un triunghi iar θ cel mai mic unghi al său atunci

$$\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq \frac{2}{\sin(\theta)}.$$

3. Descrieți condițiile de clasă zero și de compatibilitate în cazul în care Ω este un interval din $\mathbb{R}$.
4. Fie Ω un deschis poliedric mărginit din $\mathbb{R}^3$ și X_h spațiile de elemente finite corespunzătoare unei familii de triangulații regulată. Dacă există $c > 0$ independentă de h astfel încât $\rho_K \geq ch$ pentru orice element K din triangulații, atunci există $C > 0$ independentă de h astfel încât

$$|\varphi_h|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{h} \|\varphi_h\|_{0,\Omega}.$$

Capitolul 7

Ecuatii în dimensiune unu

În acest capitol vom arăta cum poate fi utilizată metoda elementului finit pentru aproximarea soluțiilor ecuațiilor eliptice în cazul unidimensional. Vom prezenta în detaliu fiecare pas al metodei și vom discuta rezultatele numerice, considerând diferite exemple de ecuații (cu coeficienți constanți sau variabili, cu condiții Dirichlet sau Neumann, de ordin doi sau patru etc.) și folosind mai multe tipuri de elemente finite.

Problemele prezentate în acest capitol pot fi rezolvate prin alte metode (Fourier, diferențe finite) și chiar exact. Prin simplitatea lor, ele se constituie însă și în foarte bune exemple pentru înțelegerea principiilor de bază ale metodei elementului finit. De aceea, cititorul trebuie să le acorde importanța cuvenită, să sesizeze particularul și generalul din fiecare exemplu și să poată adapta cunoștințele dobândite la cazul unor noi probleme.

Vom ilustra fiecare tip de problemă considerat cu exemple concrete, care admit soluții explicite, comentând rezultatele numerice obținute și evidențind sursa și mărimea erorilor.

7.1 Ecuație cu coeficienți constanți și condiții Dirichlet omogene

Fiind date $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ și $f \in L^2(\Omega)$, se consideră ecuația eliptică de ordin doi cu condiții Dirichlet omogene

$$(7.1) \quad \begin{cases} -u_{xx} = f, & x \in \Omega \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Datorită condițiilor la limită din (7.1), soluția va aparține spațiului

$$V = H_0^1(\Omega).$$

Formularea variațională corespunzătoare problemei (7.1) este

$$(7.2) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V$$

unde

$$a(u, \varphi) = \int_0^1 u_x(x) \varphi_x(x) dx, \quad L(\varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx.$$

Este ușor de arătat că $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este biliniară, continuă, simetrică și coercivă iar $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ este liniară și continuă. Rezultă din teorema Lax-Milgram că există o unică soluție $u \in V$ a ecuației variaționale (7.2). Ne propunem să aproximăm această soluție cu ajutorul metodei elementului finit. Vom considera pentru aceasta trei tipuri diferite de elemente finite iar la final vom realiza o comparare a lor.

7.1.1 Elemente finite liniare

Acesta este cel mai elementar exemplu de folosire a metodei elementului finit. Deși foarte simplu, fiind primul exemplu, vom prezenta în detaliu pașii necesari obținerii aproximării numerice. “Rețeta” va fi apoi aplicată în mod asemănător la cazuri mai complicate.

1. Alegerea elementelor finite. Fie $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N+1}$. Considerăm o diviziune echidistantă a intervalului Ω ,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1,$$

unde $x_j = jh$, $0 \leq j \leq N+1$.

Notând $K_j = [x_j, x_{j+1}]$ vom observa imediat că $\mathcal{T}_h = \{K_j\}_{0 \leq j \leq N}$ este o triangulație a lui Ω .

Asociem triangulației familia de elemente finite $\{K_j, \Sigma_j, P_j\}_{0 \leq j \leq N}$ definită astfel:

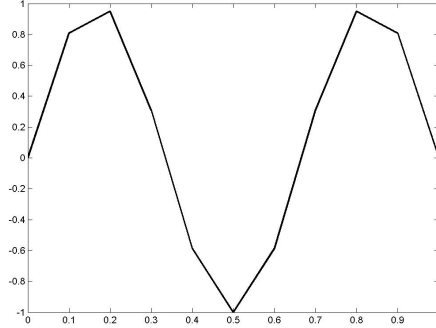
$$\Sigma_j = \{x_j, x_{j+1}\}, \quad P_j = \{v : K_j \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Este ușor de arătat că familia de elemente finite introdusă mai sus îndeplinește condițiile de clasă zero și de compatibilitate $C1 - C4$ și este o familie regulată. Lăsăm cititorilor verificarea condițiilor, care în acest caz, este trivială.

2. Definirea spațiului de aproximații și alegerea unei baze.

Folosind elementele finite de mai sus, definim spațiul de aproximații

$$V_h = \{\varphi \in \mathcal{C}[0, 1] : \varphi|_{K_j} \in P_j, \quad 0 \leq j \leq N, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Figura 7.1: Exemplu de funcție din V_h .

Spațiul V_h este format din funcții continue și liniare pe porțiuni. De aici și denumirea elementelor finite. Observați că orice funcție din spațiul V_h este unic determinată dacă se dau valorile ei în nodurile triangulației. Deoarece $P_j \subset H^1(x_j, x_{j+1})$ și $\{K_j\}_{0 \leq j \leq N}$ este o partiție a lui Ω , din Teorema 6.1.1 rezultă că $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. În figura 7.1 am schițat graficul unei funcții din V_h .

Pentru fiecare $1 \leq j \leq N$, definim funcția $\varphi_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca

$$\varphi_j \in V_h, \quad \varphi_j(x_i) = \delta_{ji}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N+1\}.$$

Funcția φ_j este definită în mod unic iar expresia ei analitică este

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} & \text{dacă } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} & \text{dacă } x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

În figura 7.2 am reprezentat grafic una dintre funcțiile φ_j . Observați suportul foarte localizat al acesteia și liniaritatea ei pe fiecare element K_i al triangulației.

Din definiția funcțiilor φ_j și din teorema 6.2.2, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ este o bază în V_h . O consecință a acestui fapt este că $\dim(V_h) = N$.

3. Determinarea soluției aproximative. Soluția aproximativă $u_h \in V_h$ se scrie sub forma

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j,$$

fiind complet determinată dacă se cunosc coeficienții $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$.

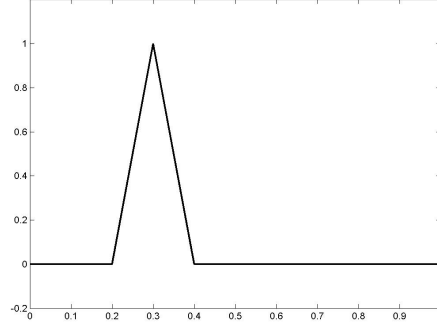


Figura 7.2: Funcția φ_j .

Ea trebuie să verifice

$$(7.3) \quad a(u_h, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Cum $\{\varphi_j\}_{1 \leq j \leq N}$ este o bază în V_h , obținem că (7.3) se verifică dacă și numai dacă

$$(7.4) \quad a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Prin urmare, $\alpha = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N$ va fi soluția sistemului

$$(7.5) \quad R\alpha = F,$$

unde $R \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ este matricea pătratică de elemente $R_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ iar $F \in \mathbb{R}^N$ este vectorul de elemente $F_j = L(\varphi_j)$.

După un calcul elementar, obținem că

$$R_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \begin{cases} \frac{2}{h} & \text{dacă } i = j \\ -\frac{1}{h} & \text{dacă } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$$

și prin urmare

$$R = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să remarcăm că matricea R a sistemului (7.5), deși poate avea dimensiunea N foarte mare, nu are mai mult de trei elemente nenule pe o linie. De fapt ea este o matrice tridiagonală.

Termenul liber F poate fi determinat prin calcul direct al lui $L(\varphi_j)$, atunci când acest lucru este posibil și nu presupune o muncă prea mare. În general însă se obișnuiește să se folosească o formulă de integrare numerică precum

- Metoda trapezelor:

$$\begin{aligned} L(\varphi_j) &= \\ &= \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \approx \\ &\approx \frac{h}{2}[f(x_{j-1})\varphi_j(x_{j-1}) + f(x_j)\varphi_j(x_j)] + \\ &\quad + \frac{h}{2}[f(x_j)\varphi_j(x_j) + f(x_{j+1})\varphi_j(x_{j+1})] = \\ &= hf(x_j). \end{aligned}$$

- Metoda Simpson:

$$\begin{aligned} L(\varphi_j) &= \\ &= \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \approx \\ &\approx \frac{h}{6}[f(x_{j-1})\varphi_j(x_{j-1}) + 4f(x_j - h/2)\varphi_j(x_j - h/2) + f(x_j)\varphi_j(x_j)] + \\ &\quad + \frac{h}{6}[f(x_j)\varphi_j(x_j) + 4f(x_j + h/2)\varphi_j(x_j + h/2) + f(x_{j+1})\varphi_j(x_{j+1})] = \\ &= \frac{h}{3}[f(x_j - h/2) + f(x_j) + f(x_j + h/2)]. \end{aligned}$$

Putem lua, prin urmare,

$$F_j = \begin{cases} L(\varphi_j) \text{ (exact)} \\ \text{sau (aproximație cu metoda trapezelor)} \\ hf(x_j) \\ \text{sau (aproximație cu metoda Simpson)} \\ \frac{h}{3}[f(x_j - h/2) + f(x_j) + f(x_j + h/2)]. \end{cases}$$

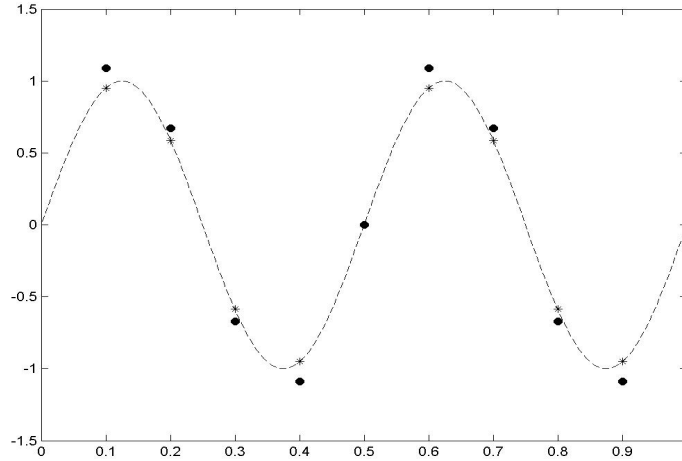


Figura 7.3: Soluția exactă și aproximațiile ei cu $h = 1/10$ în Exemplul 7.1.

Alte metode de calcul al termenului liber vor fi date în capitolul 9.

Cu aceasta sistemul (7.5) este complet și se poate trece la determinarea soluției lui.

4. Rezultate și comentarii numerice.

- **Exemplul 7.1: Rezultate în nodurile triangulației.** Considerăm

$$f(x) = 16\pi^2 \sin(4\pi x),$$

ceea ce ne permite să găsim soluția exactă a ecuației (7.1),

$$u(x) = \sin(4\pi x).$$

Pentru a pune în evidență fenomenul de superconvergență și pentru a vedea influența aproximărilor termenului liber asupra preciziei rezultatului final, vom rezolva pe rând sistemul (7.5) cu:

1. $F_j = 16\pi^2 h \sin(4\pi x_j)$ (**metoda trapezelor**).
2. $F_j = \frac{16\pi^2 h}{3} [\sin(4\pi(x_j - h/2)) + \sin(4\pi x_j) + \sin(4\pi(x_j + h/2))]$ (**metoda Simpson**).
3. $F_j = \int_0^1 f \varphi_j dx = \frac{1}{h} [-\sin(4\pi x_{j-1}) + 2\sin(4\pi x_j) - \sin(4\pi x_{j+1})]$ (**calcul exact**).

Nodul	Aprox. (a)	Aprox. (b)	Aprox. (c)	Soluția exactă
x_1	1.08674760	0.94838072	0.95105652	0.95105652
x_2	0.67164696	0.58613152	0.58778525	0.58778525
x_3	-0.67164696	-0.58613152	-0.58778525	-0.58778525
x_4	-1.08674760	-0.94838072	-0.95105652	-0.95105652
x_5	-0.00000000	-0.00000000	-0.00000000	-0.00000000
x_6	1.08674760	0.94838072	0.95105652	0.95105652
x_7	0.67164696	0.58613152	0.58778525	0.58778525
x_8	-0.67164696	-0.58613152	-0.58778525	-0.58778525
x_9	-1.08674760	0.94838072	-0.95105652	-0.95105652

Tabelul 7.1: Valorile aproximațiilor cu $h = 1/10$ și elemente finite liniare în cele trei cazuri de alegere a termenului liber, comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 7.1.

Aproximația	Aprox. (a)	Aprox. (b)	Aprox. (c)
Eroarea	0.13569109	0.00267579	0.00000000

Tabelul 7.2: Eroarea maximă la fiecare alegere a termenului liber în Exemplul 7.1.

În figura 7.3 prezentăm graficul soluției exacte prin linie punctată și aproximațiile numerice: cerculețele obținute folosind metoda trapezelor (metoda (a)) și stelulele obținute folosind metoda Simpson (metoda (b)) pentru calculul termenului liber. S-a folosit $h = 1/10$.

Rezultatele numerice detaliate se găsesc în cele două tabele 7.1 și 7.2. În tabelul 7.1 sunt date valorile aproximative în nodurile triangulației, folosind cele trei metode de alegere a termenului liber (metoda trapezelor (a), metoda Simpson (b), metoda exactă (c)). De asemenea, pentru comparație, în ultima coloană sunt specificate valorile soluției exacte. În tabelul 7.2 sunt date diferențele maxime între aproximații și valorile exacte în nodurile triangulației cu fiecare dintre cele trei metode.

Pe de o parte, în tabelul 7.2 se observă că eroarea este mai mare în coloana 2 decât în coloana 3. Prin urmare, când folosim metoda Simpson obținem rezultate mai bune decât când folosim metoda trapezelor. Acest lucru ne arată că eroarea aproximației depinde de metoda de integrare pe care o utilizăm. Este posibil ca metoda de aproximare să dea rezultate de o precizie bună pe care folosirea unei metode de integrare nepotrivite să o “strice”. Astfel, vom avea o grijă deosebită pentru alegerea unei metode de integrare a termenului liber care să aibă cel puțin ordinul de precizie al metodei elementului finit alese. Dar care este cea mai bună metodă de integrare în acest caz?

Pentru a răspunde la această întrebare, să observăm că cele mai bune rezul-

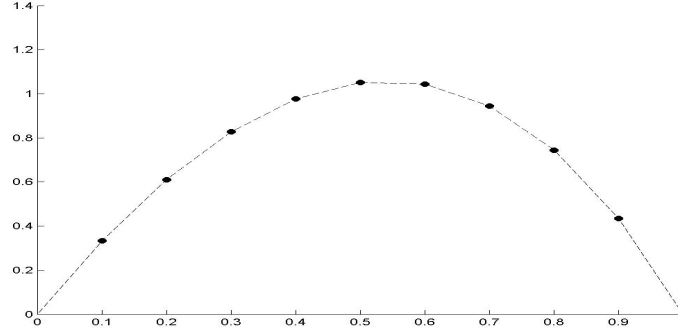


Figura 7.4: Soluția exactă și aproximația ei cu $h = 1/10$ în Exemplul 7.2.

tate (precizie maximă cel puțin în limitele de afișare alese) s-au obținut în ultima coloană, când termenul liber a fost calculat exact. Prin urmare se pare că nici o formulă de integrare numerică nu este de precizia metodei.

Acest fenomen, cu totul singular, este specific ecuației liniare într-o dimensiune cu coeficienți constanți și poartă numele de superconvergență. El a fost studiat în paragraful 4.5.3, unde se vede că, dacă nu sunt folosite aproximări ale integralelor termenilor liberi, metoda elementului finit oferă valorile exacte ale soluției în noduri, indiferent de valoarea lui N .

- **Exemplul 7.2: Rezultate în alte puncte decât nodurile triangulației.** Considerăm acum $f(x) = 5e^x$ și observăm că soluția exactă este dată de

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(1 - (-1)^n e)}{n\pi(1 + n^2\pi^2)} \sin(n\pi x).$$

Din nou vom rezolva pe rând sistemul (7.5) cu trei posibilități de alegere a termenului liber:

1. $F_j = he^{x_j}$ (**metoda trapezelor**).
2. $F_j = \frac{h}{3}[e^{x_j-h/2} + e^{x_j} + e^{x_j+h/2}]$ (**metoda Simpson**).
3. $F_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \frac{1}{h}[e^{x_{j+1}} - 2e^{x_j} + e^{x_{j-1}}]$ (**calcul exact**).

În figura 7.4 reprezentăm prin linie punctată graficul soluției exacte și prin cercurițe aproximările numerice obținute folosind $h = 1/10$ și metoda trapezelor (metoda (a)) pentru calculul termenului liber.

Rezultatele numerice detaliate se găsesc în tabelele 7.3 și 7.4.

În tabelul 7.3 sunt date valorile aproximative în nodurile triangulației, folosind cele trei metode de alegere a termenului liber (metoda trapezelor (a), metoda Simpson (b), metoda exactă (c)). De asemenea, pentru comparație,

Nodul	Aprox. (a)	Aprox. (b)	Aprox. (c)	Soluția exactă
x_1	0.33300872	0.33328629	0.33328632	0.33328632
x_2	0.61075890	0.61126797	0.61126804	0.61126804
x_3	0.82743894	0.82812862	0.82812870	0.82812870
x_4	0.97662604	0.97744007	0.97744017	0.97744017
x_5	1.05122191	1.05209811	1.05209822	1.05209822
x_6	1.04338171	1.04425137	1.04425148	1.04425148
x_7	0.94443557	0.94522276	0.94522267	0.94522267
x_8	0.43389098	0.43425259	0.43425267	0.43425267
x_9	0.43389098	0.43425263	0.43425267	0.43425267

Tabelul 7.3: Valorile aproximărilor cu $h = 1/10$ și elemente finite liniare în cele trei cazuri de alegere a termenului liber, comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 7.2.

Aproximația	(a)	(b)	(c)
Eroarea	0.00087631	0.00000011	0.00000000

Tabelul 7.4: Eroarea maximă în fiecare caz de alegere a termenului liber în Exemplul 7.2.

în ultima coloană sunt specificate valorile soluției exacte. Valorile soluției exacte s-au obținut în acest caz prin însumarea primilor 10000 de termeni din seria Fourier a lui u . Avem că

$$\left| u(x) - \sum_{n=1}^{10000} \frac{10(1 - (-1)^n e)}{n\pi(1 + n^2\pi^2)} \sin(n\pi x) \right| \leq \sum_{n=10001}^{\infty} \frac{40}{\pi^3 n^3} \leq 10^{-8}.$$

Tabelul 7.3 arată similar tabelului 7.1: eroarea este mai mică în coloana 2 decât în coloana 3 și practic zero în coloana 3. Explicația acestui fapt este cea dată în exemplul precedent și are la bază fenomenul de superconvergență.

În tabelul 7.4 sunt date erorile maxime în aproximarea soluției folosind cele trei metode de calcul al termenului liber. Să observăm că erorile descresc de la stânga la dreapta în cele trei coloane ale tabelului 7.4 și practic sunt egale cu erorile de calcul ale termenilor liberi. În concluzie, în punctele triangulației metoda dă rezultate exacte care pot fi deteriorate prin folosirea unor formule de aproximare a termenului liber. Erorile în acest ultim caz vor fi datorate exclusiv aproximării termenului liber.

Vom analiza în continuare și cazul altor puncte, diferite de nodurile triangulației. Mai precis, vom alege punctele $x_{j+1/2} = jh + \frac{h}{2}$, $1 \leq j \leq N$. Aproximațiile soluției se calculează astfel

$$u(x_{j+1/2}) \approx u_h(x_{j+1/2}) = (\alpha_j \varphi_j + \alpha_{j+1} \varphi_{j+1})(x_{j+1/2}) = \frac{1}{2} (\alpha_j + \alpha_{j+1}).$$

Nodul	Aprox. (a)	Aprox. (b)	Aprox. (c)	Soluția exactă
$x_1 + h/2$	0.47188381	0.47227713	0.47227718	0.47954016
$x_2 + h/2$	0.71909892	0.71969830	0.71969837	0.72772520
$x_3 + h/2$	0.90203249	0.90278434	0.90278444	0.91165546
$x_4 + h/2$	1.01392397	1.01476909	1.01476919	1.02457319
$x_5 + h/2$	1.04730181	1.04817474	1.04817485	1.05900994
$x_6 + h/2$	0.99390864	0.99473707	0.99473717	1.00671180
$x_7 + h/2$	0.84461868	0.84532268	0.84532277	0.85855677
$x_8 + h/2$	0.58934639	0.58983761	0.58983767	0.60446351
$x_9 + h/2$	0.21694549	0.21712631	0.21712634	0.23329039

Tabelul 7.5: Valorile aproximațiilor cu $h = 1/10$ și elemente finite liniare în cele trei cazuri de alegere a termenului liber, comparate cu valorile soluției exacte în puncte situate la jumătatea distanței dintre nodurile triangulației în Exemplul 7.2.

Aproximația	(a)	(b)	(c)
Eroarea	0.01634490	0.01616408	0.01616405

Tabelul 7.6: Eroarea maximă în fiecare caz de alegere a termenului liber în puncte situate la jumătatea distanței dintre nodurile triangulației în Exemplul 7.2.

În tabelul 7.5 sunt date valorile aproximative în puncte situate la jumătatea distanței dintre nodurile triangulației. Ca și mai înainte se folosesc trei metode de alegere a termenului liber (metoda trapezelor (a), metoda Simpson (b), metoda exactă (c)). De asemenea, pentru comparație, în ultima coloană sunt specificate valorile soluției exacte. În tabelul 7.6 sunt date erorile maxime în fiecare dintre cele trei aproximări în punctele situate la jumătatea distanței dintre nodurile triangulației.

Să observăm că situația este diferită de cazul în care s-au considerat doar nodurile triangulației. Vedem că, atunci când se consideră puncte diferite de nodurile triangulației (tabelele 7.5 și 7.6), erorile de aproximare sunt practic egale. Rezultatele nu se îmbunătățesc prin folosirea unor metode mai precise de calcul al termenului liber (Simpson sau calcul exact). Acest lucru ne arată că eroarea aproximației cu metoda elementului finit este cel puțin egală cu eroarea metodei de integrare a trapezelor.

5. Concluzii. Prin folosirea elementelor finite liniare s-au obținut:

- Rezultate exacte în nodurile triangulației dacă termenul liber și matricea sistemului au fost calculate exact și erori de ordinul metodelor de aproximare folosite pentru determinarea termenului liber și a matricii sistemului în caz contrar. Rezultatele exacte obținute sunt consecința

fenomenului de superconvergență.

- Rezultate cu o precizie de ordin h^2 atunci când s-au considerat alte puncte, diferite de nodurile triangulației. În acest caz, formula trapezelor este suficientă pentru determinarea termenului liber, ea având o eroare de acest ordin.

7.1.2 Elemente finite pătratice

Vom considera din nou ecuația (7.1) și vom schimba elementele finite. Vom parcurge aceiași pași ca mai înainte, subliniind diferențele.

1. Alegerea elementelor finite. Date $N \in \mathbb{N}$ și $h = \frac{1}{N+1}$, considerăm o nouă diviziune echidistantă a intervalului Ω , $0 = x_0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_N < x_{N+1/2} < x_{N+1} = 1$, unde $x_j = jh$, $0 \leq j \leq N+1$ și $x_{j+1/2} = x_j + h/2$, $0 \leq j \leq N$.

Notând $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, vom observa imediat că $\mathcal{T}_h = \{K_j\}_{0 \leq j \leq N}$ este o triangulație a lui Ω .

Asociem triangulației familia de elemente finite $\{K_j, \Sigma_j, P_j\}_{0 \leq j \leq N}$ definită astfel:

$$\Sigma_j = \{x_j, x_{j+1/2}, x_{j+1}\},$$

$$P_j = \{v : K_j \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Este ușor de arătat că familia de elemente finite introdusă mai sus îndeplinește condițiile de clasă zero și de compatibilitate și este o familie regulată. Într-adevăr,

Condiții de clasă zero: Pentru elementul finit $\{K_j, \Sigma_j, P_j\}$, avem că

- Fiind polinoame, funcțiile din P_j sunt continue.
- Restricțiile funcțiilor din P_j la una dintre extremitățile intervalului K_j descriu mulțimea numerelor reale (sau, echivalent, a funcțiilor constante definite într-un punct). Evident, acestea sunt unic determinate de valoarea lor într-un punct.

Condiții de compatibilitate: Fiind date două elemente finite adiacente și T' punctul comun, avem că:

- T' se găsește în ambele mulțimi Σ .
- Elementele din ambele mulțimi P restricționate la T' formează mulțimea funcțiilor constante definite într-un punct.

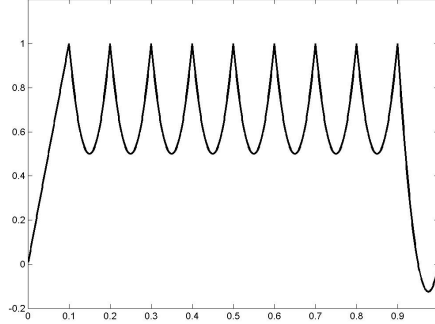


Figura 7.5: Exemplu de funcție din V_h .

2. Definirea spațiului de aproximații și alegerea unei baze.

Date elementelor finite de mai sus, introducem spațiul de aproximații

$$V_h = \{\varphi \in \mathcal{C}[0, 1] : \varphi|_{K_j} \in P_j, 0 \leq j \leq N, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Vom nota

$$\Sigma = \cup_{j=0}^N \Sigma_j, \quad \Sigma_D = \Sigma \setminus \{0, 1\}.$$

Spațiul V_h este format din funcții continue și pătratice pe porțiuni care sunt unic determinate de valorile lor în punctele din Σ_D . Din Teorema 6.1.1 rezultă că $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. În figura 7.5 am schițat graficul unei funcții din V_h .

Pentru fiecare $1 \leq j \leq N$, definim funcția $\varphi_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ din V_h cu proprietatea că

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad \varphi_j(x_{i+1/2}) = 0, \quad 0 \leq i \leq N$$

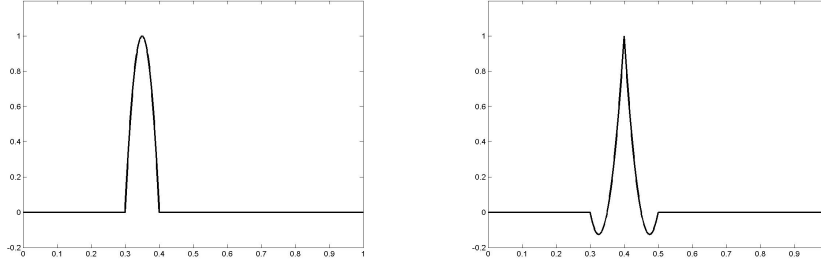
iar pentru fiecare $0 \leq j \leq N$, definim funcția $\varphi_{j+1/2} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ din V_h cu proprietatea că

$$\varphi_{j+1/2}(x_i) = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad \varphi_{j+1/2}(x_{i+1/2}) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Expresia analitică a funcțiilor φ_j și $\varphi_{j+1/2}$ este dată de

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{2}{h^2}(x - \frac{h}{2} - jh)(x - h - jh) & \text{dacă } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ \frac{2}{h^2}(x + \frac{h}{2} - jh)(x + h - jh) & \text{dacă } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0 & \text{în celelalte cazuri,} \end{cases}$$

$$\varphi_{j+1/2}(x) = \begin{cases} -\frac{4}{h^2}(x - jh)(x - h - jh) & \text{dacă } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Figura 7.6: Funcțiile φ_j și $\varphi_{j+1/2}$.

Teorema 6.2.2 asigură că $\{\varphi_{1/2}, \varphi_1, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1/2}\}$ este o bază în V_h . O consecință a acestui fapt este că $\dim(V_h) = 2N + 1$.

3. Determinarea soluției aproximative. Scriem soluția aproximativă $u_h \in V_h$ sub forma

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j + \sum_{j=0}^N \alpha_{j+1/2} \varphi_{j+1/2}.$$

Pentru determinarea necunoscutelor $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq N}$, $(\alpha_{j+1/2})_{0 \leq j \leq N}$ ca soluții ale unui sistem linear, este necesară renumerotarea lor.

Astfel, nodurile $(x_j)_{0 \leq j \leq N+1}$ vor deveni $(x_{2k})_{0 \leq k \leq N+1}$ iar $(x_{j+1/2})_{0 \leq j \leq N}$ vor fi notate $(x_{2k+1})_{0 \leq k \leq N}$. Necunoscutele α și funcțiile din bază φ vor fi, de asemenea, numerotate de la 1 la $2N + 1$. Vom avea că

$$u_h = \sum_{k=1}^{2N+1} \alpha_k \varphi_k,$$

$\alpha = (\alpha_k)_{1 \leq k \leq 2N+1}$ fiind soluția sistemului

$$(7.6) \quad R\alpha = F$$

unde $R \in \mathcal{M}_{2N+1}$ este matricea pătratică de elemente $R_{kl} = a(\varphi_l, \varphi_k)$ iar $F \in \mathbb{R}^{2N+1}$ este vectorul de elemente $F_k = L(\varphi_k)$.

După un calcul elementar obținem că

$$R_{kl} = \begin{cases} \frac{16}{3h} & \text{dacă } k = l, k \text{ impar} \\ \frac{14}{3h} & \text{dacă } k = l, k \text{ par} \\ -\frac{8}{3h} & \text{dacă } |k - l| = 1 \\ \frac{1}{3h} & \text{dacă } |k - l| = 2, k \text{ par} \\ 0 & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$$

și prin urmare

$$R = \frac{1}{3h} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Să remarcăm că matricea R , deși poate avea dimensiunea N foarte mare, nu are mai mult de cinci elemente nenule pe o linie. De fapt ea este o matrice pentadiagonală.

Termenul liber F poate fi determinat prin calcul direct al lui $L(\varphi_k)$, atunci când acest lucru este posibil și nu presupune o muncă prea mare. În general însă se obișnuiește să se folosească o formulă de integrare numerică precum

- Metoda trapezelor: Vom deosebi două cazuri, $k = 2j$ sau $k = 2j + 1$.
i) k este par, $k = 2j$:

$$\begin{aligned} L(\varphi_k) &= \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx = \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \varphi_k(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \varphi_k(x) dx = \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \varphi_j(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \varphi_j(x) dx \approx \\ &\approx \frac{h}{4} [f(x_{j-1/2}) \varphi_j(x_{j-1/2}) + f(x_j) \varphi_j(x_j)] + \frac{h}{4} [f(x_j) \varphi_j(x_j) + \\ &\quad + f(x_{j+1/2}) \varphi_j(x_{j+1/2})] = \frac{h}{2} f(x_j). \end{aligned}$$

- ii) k este impar, $k = 2j - 1$:

$$\begin{aligned} L(\varphi_k) &= \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \varphi_k(x) dx = \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} f(x) \varphi_{j-1/2}(x) dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} f(x) \varphi_{j-1/2}(x) dx \approx \end{aligned}$$

$$\approx \frac{h}{2}[f(x_{j-1})\varphi_{j-1/2}(x_{j-1}) + f(x_{j-1/2})\varphi_{j-1/2}(x_{j-1/2})] +$$

$$\frac{h}{4}[f(x_{j-1/2})\varphi_{j-1/2}(x_{k-1/2}) + f(x_j)\varphi_{j-1/2}(x_j)] = \frac{h}{2}f(x_{j-1/2}).$$

- Metoda Simpson: Vom deosebi două cazuri, $k = 2j$ sau $k = 2j + 1$.

i) k este par, $k = 2j$:

$$\begin{aligned} L(\varphi_k) &= \int_0^1 f(x)\varphi_k(x)dx = \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_k(x)dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi_k(x)dx = \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \approx \\ &\approx \frac{h}{6}[f(x_{j-1})\varphi_j(x_{j-1}) + 4f(x_{j-1/2})\varphi_j(x_{j-1/2}) + f(x_j)\varphi_j(x_j)] + \\ &+ \frac{h}{6}[f(x_j)\varphi_j(x_j) + 4f(x_{j+1/2})\varphi_j(x_{j+1/2}) + f(x_{j+1})\varphi_j(x_{j+1})] = \\ &= \frac{h}{3}f(x_j). \end{aligned}$$

ii) k este impar, $k = 2j - 1$:

$$\begin{aligned} L(\varphi_k) &= \int_0^1 f(x)\varphi_k(x)dx = \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\varphi_k(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_{j-1/2}(x)dx \approx \\ &\frac{h}{6}[f(x_{j-1})\varphi_{j-1/2}(x_{j-1}) + 4f(x_{j-1/2})\varphi_{j-1/2}(x_{j-1/2}) + f(x_j)\varphi_{j-1/2}(x_j)] = \\ &= \frac{2h}{3}f(x_{j-1/2}). \end{aligned}$$

Prin urmare, putem lua

$$F_k = \begin{cases} \text{(exact)} \\ L(\varphi_k) \\ \text{sau (aproximație cu metoda trapezelor)} \\ \frac{h}{2} f(x_k) \\ \text{sau (aproximație cu metoda Simpson)} \\ \frac{h}{3} f(x_k) \text{ dacă } k \text{ par} \\ \frac{2h}{3} f(x_k) \text{ dacă } k \text{ impar} . \end{cases}$$

Cu aceasta sistemul (7.6) este complet și se poate trece la determinarea soluției lui.

4. Rezultate și comentarii numerice.

- **Exemplul 7.1 (continuare): Rezultate în nodurile triangulației.** Considerăm din nou $f(x) = 16\pi^2 \sin(4\pi x)$ și aproximăm soluția ecuației (7.1) folosind elementele finite pătratice și rezolvând sistemul (7.6).

Vom considera toate cele trei posibilități de alegere a termenului liber descrise mai sus.

1. $F_k = 8\pi^2 h \sin(4\pi x_k)$
(metoda trapezelor).
2. $F_k = \begin{cases} \frac{16\pi^2 h}{3} \sin(4\pi x_k), & k \text{ par} \\ \frac{32\pi^2 h}{3} \sin(4\pi x_k), & k \text{ impar} \end{cases}$
(metoda Simpson).
3. $F_j = \begin{cases} \frac{1}{h} (6 \sin(4\pi x_k) + \sin(4\pi x_{k+2})) + \sin(4\pi x_{k-2})) + \\ + \frac{1}{\pi h^2} (\cos(4\pi x_{k+2}) - \cos(4\pi x_{k-2})), & k \text{ par} \\ -\frac{4}{h} (\sin(4\pi x_{k+2})) + \sin(4\pi x_k)) + \\ + \frac{2}{h^2 \pi} (\cos(4\pi x_k) - \cos(4\pi x_{k+2})), & k \text{ impar} \end{cases}$
(calcul exact).

În tabelele 7.7 și 7.8 se observă că eroarea este mai mare în coloana 2 decât în coloana 3. Prin urmare, când folosim metoda Simpson obținem rezultate mai bune decât când folosim metoda trapezelor. Cele mai bune rezultate s-au obținut în ultima coloană, când termenul liber a fost calculat exact. Oricum, observați că eroarea maximă este în acest caz de ordinul celei obținute cu metoda Simpson. Dacă se consideră doar nodurile x_j , eroarea este practic zero. Acest rezultat este din nou consecința fenomenului de superconvergență.

Nodul	Aprox. (a)	Aprox. (b)	Aprox. (c)	Soluția exactă
$x_{1/2}$	0.57850434	0.59021452	0.58703608	0.58778525
x_1	0.98297244	0.94838072	0.95105652	0.95105652
$x_{3/2}$	0.93603968	0.95498715	0.94984433	0.95105652
x_2	0.60751038	0.58613152	0.58778525	0.58778525
$x_{5/2}$	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
x_3	-0.60751038	-0.58613152	-0.58778525	-0.58778525
$x_{7/2}$	-0.93603968	-0.95498715	-0.94984433	-0.95105652
x_4	-0.98297244	-0.94838072	-0.95105652	-0.95105652
$x_{9/2}$	-0.57850434	-0.59021452	-0.58703608	-0.58778525
x_5	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
$x_{11/2}$	0.57850434	0.59021452	0.58703608	0.58778525
x_6	0.98297244	0.94838072	0.95105652	0.95105652
$x_{13/2}$	0.93603968	0.95498715	0.94984433	0.95105652
x_7	0.60751038	0.58613152	0.58778525	0.58778525
$x_{15/2}$	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
x_8	-0.60751038	-0.58613152	-0.58778525	-0.58778525
$x_{17/2}$	-0.93603968	-0.95498715	-0.94984433	-0.95105652
x_9	-0.98297244	-0.94838072	-0.95105652	-0.95105652
$x_{19/2}$	-0.57850434	-0.59021452	-0.58703608	-0.58778525

Tabelul 7.7: Valorile aproximațiilor cu $h = 1/10$ și elemente finite pătratice în cele trei cazuri de alegere a termenului liber, comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 7.1.

Aproximația	(a)	(b)	(c)
Eroarea	0.03191593	0.00393064	0.00121219

Tabelul 7.8: Eroarea maximă la fiecare alegere a termenului liber în Exemplul 7.1.

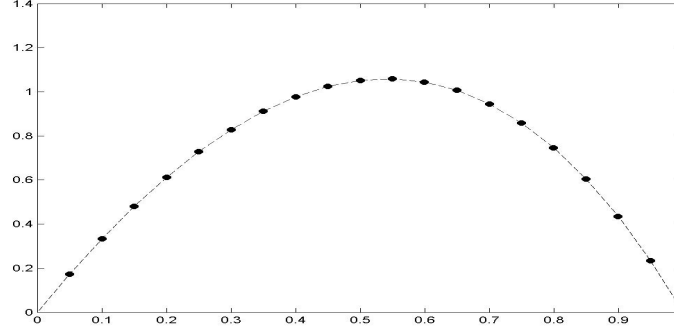


Figura 7.7: Soluția exactă și aproximațiile ei în Exemplul 7.2.

- **Exemplul 7.2 (continuare): Rezultate în noduri diferite de cele ale triangulației.** Considerăm acum $f(x) = 5e^x$ și vom aproxima soluția problemei (7.1) folosind elemente finite pătratice. Pentru aceasta vom rezolva pe rând sistemul (7.5) cu trei posibilități de alegere a termenului liber:

1. $F_k = \frac{5h}{2} e^{x_k}$
(metoda trapezelor).
2. $F_k = \begin{cases} \frac{5h}{3} e^{x_k}, & k \text{ par} \\ \frac{10h}{3} e^{x_k}, & k \text{ impar} \end{cases}$
(metoda Simpson).
3. $F_j = \begin{cases} -\frac{5}{h} (6e^{x_k} + e^{x_{k+2}} + e^{x_{k-2}}) + \frac{20}{h^2} (e^{x_{k+2}} - e^{x_{k-2}}), & k \text{ par} \\ \frac{20}{h} (e^{x_{k+2}} + e^{x_k}) - \frac{40}{h^2\pi} (e^{x_{k+2}} - e^{x_k}), & k \text{ impar} \end{cases}$
(calcul exact).

În figura 7.7 prezentăm graficul soluției exacte (linia punctată) precum și aproximațiile numerice (punctele îngroșate) obținute folosind metoda trapezelor (metoda (a)) pentru calculul termenului liber.

Rezultatele numerice detaliate se găsesc în tabelele 7.9 și 7.10, fiind similare celor din tabelele 7.7 și respectiv 7.8.

În tabelul 7.9 sunt date valorile aproximative ale soluției în nodurile triangulației, folosind cele trei metode de alegere a termenului liber (metoda trapezelor (a), metoda Simpson (b), metoda exactă (c)). De asemenea, pentru comparație, în ultima coloană sunt specificate valorile soluției exacte. În tabelul 7.10 sunt date erorile maxime cu cele trei metode de determinare a termenului liber. După cum am mai spus, rezultatele sunt calitativ asemănătoare celor din tabelele 7.7 și 7.8, observându-se superioritatea formulei lui Simpson față de formula trapezelor și fenomenul de superconvergență doar în nodurile x_{2j} .

Nodul	Aprox. (a)	Aprox. (b)	Aprox. (c)	Soluția exactă
$x_{1/2}$	0.17153628	0.17321359	0.17321525	0.17321498
x_1	0.33321690	0.33328629	0.33328632	0.33328632
$x_{3/2}$	0.47762490	0.47953860	0.47954046	0.47954016
x_2	0.61114071	0.61126797	0.61126804	0.61126804
$x_{5/2}$	0.72556732	0.72772346	0.72772554	0.72772520
x_3	0.82795620	0.82812862	0.82812870	0.82812870
$x_{7/2}$	0.90924826	0.91165351	0.91165583	0.91165546
x_4	0.97723656	0.97744007	0.97744017	0.97744017
$x_{9/2}$	1.02190927	1.02457104	1.02457360	1.02457319
x_5	1.05187906	1.05209811	1.05209822	1.05209822
$x_{11/2}$	1.05608113	1.05900757	1.05901039	1.05900994
x_6	1.04403396	1.04425137	1.04425148	1.04425148
$x_{13/2}$	1.00350906	1.00670920	1.00671230	1.00671180
x_7	0.94502597	0.94522276	0.94522286	0.94522286
$x_{15/2}$	0.85507012	0.85855393	0.85855733	0.85855677
x_8	0.74526739	0.74542259	0.74542267	0.74542267
$x_{17/2}$	0.60068190	0.60446040	0.60446412	0.60446351
x_9	0.43416221	0.43425263	0.43425267	0.43425267
$x_{19/2}$	0.22920162	0.23328700	0.23329106	0.23329039

Tabelul 7.9: Valorile aproximațiilor cu $h = 1/10$ și elemente finite pătrate în cele trei cazuri de alegere a termenului liber, comparate cu valorile soluției exacte în nodurile triangulației în Exemplul 7.2.

Vom analiza în continuare și cazul unor puncte diferite de nodurile triangulației. Astfel, vom alege punctele $x_{j+1/4} = jh + \frac{h}{4}$, $1 \leq j \leq N-1$. Aproximațiile soluției în aceste puncte se calculează astfel

$$\begin{aligned}
u(x_{j+1/4}) &\approx u_h(x_{j+1/4}) = \\
&= \alpha_{2j} \varphi_{2j}(x_{j+1/4}) + \alpha_{2j+1} \varphi_{2j+1}(x_{j+1/4}) + \alpha_{2j+2} \varphi_{2j+2}(x_{j+1/4}) = \\
&= \frac{1}{8} (3\alpha_{2j} + 6\alpha_{2j+1} - \alpha_{2j+2}).
\end{aligned}$$

Aproximațiile sunt date în tabelul 7.11. Ca și mai înainte se folosesc trei metode de alegere a termenului liber (metoda trapezelor (a), metoda Simpson (b), metoda exactă (c)). De asemenea, pentru comparație, în ultima coloană sunt specificate valorile soluției exacte. În tabelul 7.12 sunt date diferențele maxime între fiecare dintre cele trei aproximări și valorile exacte ale soluției în puncte situate la jumătatea distanței dintre nodurile triangulației.

Aproximația	(a)	(b)	(c)
Eroarea	0.00408877	0.00000339	0.00000067

Tabelul 7.10: Eroarea maximă în fiecare dintre cele trei aproximări ale termenului liber în Exemplul 7.2.

Tabelul 7.11 arată că eroarea este semnificativ mai mică în coloana 2 decât în coloana 1 și practic aceeași în coloanele 2 și 3. Prin urmare, folosirea metodei Simpson dă rezultate mai bune decât folosirea metodei trapezelor. Aproximațiile nu se îmbunătățesc când se calculează exact termenul liber. Acest lucru ne arată că eroarea aproximației este de ordinul erorii metodei de integrare Simpson.

5. Concluzii. Prin folosirea elementelor finite pătratic s-au obținut:

- În nodurile $x_{2k} = kh$ rezultate cu precizie maximă când termenul liber și matricea sistemului au fost calculate exact. Acest lucru este consecința fenomenului de superconvergență.
- În nodurile $x_{2k+1} = kh + h/2$ rezultate asemănătoare dacă termenul liber și matricea sistemului au fost determinate cu metoda de integrare Simpson sau calculate exact. Fenomenul de superconvergență nu mai este prezent. Rezultate semnificativ inferioare s-au obținut în cazul folosirii metodei trapezelor pentru determinarea termenului liber.
- Rezultate cu o precizie de ordin h^4 atunci când s-au considerat alte puncte, diferite de nodurile triangulației, și s-a folosit metoda Simpson de integrare. Formula trapezelor este nepotrivită acestei metode, ea având o eroare mult prea mare. Eroarea metodei este de ordinul formulei lui Simpson.

7.1.3 Elemente finite cubice

Vom considera din nou ecuația (7.1) și vom schimba încă o dată elementele finite.

1. Alegerea elementelor finite. Date $N \in \mathbb{N}$ și $h = \frac{1}{N+1}$, considerăm o nouă diviziune echidistantă a intervalului Ω ,

$$0 = x_0 < x_{1/3} < x_{2/3} < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1/3} < x_{N+2/3} < x_{N+1} = 1,$$

unde $x_j = jh$, $0 \leq j \leq N+1$, $x_{j+1/2} = x_j + h/3$ și $x_{j+2/3} = x_j + 2h/3$, $0 \leq j \leq N$.

Nodul	Aprox. (a)	Aprox. (b)	Aprox. (c)	Soluția exactă
$x_{1+1/4}$	0.40678242	0.40822781	0.40822921	0.40818388
$x_{2+1/4}$	0.66985873	0.67150200	0.67150358	0.67145348
$x_{3+1/4}$	0.87026520	0.87210836	0.87211011	0.87205474
$x_{4+1/4}$	1.00141078	1.00345604	1.00345798	1.00339679
$x_{5+1/4}$	1.05601125	1.05826105	1.05826319	1.05819556
$x_{6+1/4}$	1.02601628	1.02847332	1.02847567	1.02840093
$x_{7+1/4}$	0.90252890	0.90519616	0.90519873	0.90511613
$x_{8+1/4}$	0.67571642	0.67859720	0.67860001	0.67850872

Tabelul 7.11: Valorile aproximațiilor cu $h = 1/10$ și elemente finite pătratice în cele trei cazuri de alegere a termenului liber, comparate cu valorile soluției exacte în puncte situate între nodurile triangulației în Exemplul 7.2.

Aproximația	(a)	(b)	(c)
Eroarea	0.00279230	0.00008848	0.00009129

Tabelul 7.12: Eroarea maximă în fiecare dintre cele trei aproximări în puncte situate între nodurile triangulației în Exemplul 7.2.

Notând $K_j = [x_j, x_{j+1}]$ vom observa imediat că $\mathcal{T}_h = \{K_j\}_{0 \leq j \leq N}$ este o triangulație a lui Ω . Asociem triangulației familia de elemente finite $\{K_j, \Sigma_j, P_j\}_{0 \leq j \leq N}$ definită astfel:

$$\Sigma_j = \{x_j, x_{j+1/3}, x_{j+2/3}, x_{j+1}\},$$

$$P_j = \{v : K_j \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Ca și în cazul elementelor finite pătratice, este ușor de arătat că familia de elemente finite introdusă mai sus îndeplinește condițiile de clasă zero și de compatibilitate și este o familie regulată.

2. Definirea spațiului de aproximații și alegerea unei baze.

Date elementelor finite de mai sus, introducem spațiul de aproximații

$$V_h = \{\varphi \in \mathcal{C}[0, 1] : \varphi|_{K_j} \in P_j, 0 \leq j \leq N, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Vom nota

$$\Sigma = \cup_{j=0}^N \Sigma_j, \quad \Sigma_D = \Sigma \setminus \{0, 1\}.$$

Spațiul V_h este format din funcții continue care pe porțiuni sunt polinoame de grad cel mult trei. Ele sunt unic determinate de valorile lor în punctele din Σ_D . Din Teorema 6.1.1 rezultă că $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

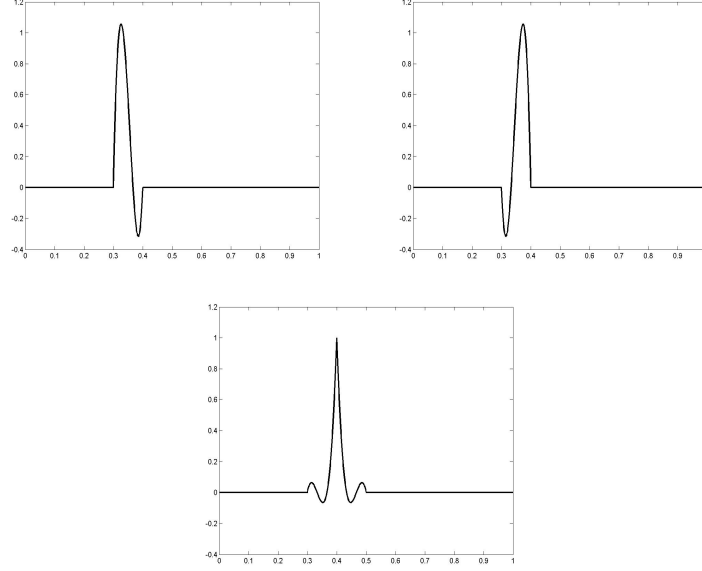


Figura 7.8: Funcțiile φ_j , $\varphi_{j+1/3}$ și $\varphi_{j+2/3}$.

Pentru fiecare $1 \leq j \leq N$, definim funcția $\varphi_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ din V_h cu proprietatea că

$$\begin{aligned}\varphi_j(x_i) &= \delta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq N+1, \\ \varphi_j(x_{i+1/3}) &= \varphi_j(x_{i+2/3}) = 0, \quad 0 \leq i \leq N.\end{aligned}$$

Pentru fiecare $0 \leq j \leq N$, definim funcțiile $\varphi_{j+1/3}, \varphi_{j+2/3} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ din V_h cu proprietatea că

$$\begin{aligned}\varphi_{j+1/3}(x_i) &= \varphi_{j+1/3}(x_{i+2/3}) = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1, \\ \varphi_{j+1/3}(x_{i+1/3}) &= \delta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq N, \\ \varphi_{j+2/3}(x_i) &= \varphi_{j+2/3}(x_{i+1/3}) = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1, \\ \varphi_{j+2/3}(x_{i+2/3}) &= \delta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq N.\end{aligned}$$

Expresia analitică a funcțiilor φ_j , $\varphi_{j+1/3}$ și $\varphi_{j+2/3}$ este dată de

$$\begin{aligned}\varphi_j(x) &= \begin{cases} \frac{9}{2}(j + \frac{1}{3} - \frac{x}{h})(j + \frac{2}{3} - \frac{x}{h})(j + 1 - \frac{x}{h}) & \text{dacă } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ -\frac{9}{2}(j - \frac{2}{3} - \frac{x}{h})(j - \frac{1}{3} - \frac{x}{h})(j - 1 - \frac{x}{h}) & \text{dacă } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \\ \varphi_{j+1/3}(x) &= \begin{cases} -\frac{27}{2}(j - \frac{x}{h})(j + \frac{2}{3} - \frac{x}{h})(j + 1 - \frac{x}{h}) & \text{dacă } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\varphi_{j+2/3}(x) = \begin{cases} \frac{27}{2}(j - \frac{x}{h})(j + \frac{1}{3} - \frac{x}{h})(j + 1 - \frac{x}{h}) & \text{dacă } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{în rest .} \end{cases}$$

Din teorema 6.2.2 rezultă că $\{\varphi_{1/3}, \varphi_{2/3}, \varphi_1, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1/3}, \varphi_{N+2/3}\}$ este o bază în V_h și $\dim(V_h) = 3N + 2$.

3. Determinarea soluției aproximative. Scriem soluția aproximativă $u_h \in V_h$ sub forma

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j + \sum_{j=0}^N \alpha_{j+1/3} \varphi_{j+1/3} + \sum_{j=0}^N \alpha_{j+2/3} \varphi_{j+2/3}.$$

Pentru determinarea necunoscutelor $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N$, $(\alpha_{j+1/3})_{0 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$ și $(\alpha_{j+2/3})_{0 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$ ca soluții ale unui sistem liniar, este necesară renumerotarea lor.

Astfel, nodurile $(x_j)_{0 \leq j \leq N+1}$, $(x_{j+1/3})_{0 \leq j \leq N}$ și $(x_{j+2/3})_{0 \leq j \leq N}$ vor deveni $(x_{3k})_{0 \leq k \leq N+1}$, $(x_{3k+1})_{0 \leq k \leq N}$ și respectiv $(x_{3k+2})_{0 \leq k \leq N}$.

În mod corespunzător se vor renumera funcțiile din bază și coeficienții astfel încât să avem

$$u_h = \sum_{k=1}^{3N+2} \alpha_k \varphi_k.$$

În acest caz, $\alpha \in \mathbb{R}^{3N+2}$ este soluția sistemului

$$(7.7) \quad R\alpha = F$$

unde $R \in \mathcal{M}_{3N+2}$ este matricea pătratică de elemente $R_{kl} = a(\varphi_l, \varphi_k)$ iar $F \in \mathbb{R}^{3N+2}$ este vectorul de elemente $F_k = L(\varphi_k)$.

După un calcul elementar obținem că

$$R_{kl} = \begin{cases} \frac{37}{5h} & \text{dacă } k = l, k \text{ de forma } 3k_1 \\ -\frac{189}{40h} & \text{dacă } |k - l| = 1, k \text{ de forma } 3k_1 \\ \frac{27}{20h} & \text{dacă } |k - l| = 2, k \text{ de forma } 3k_1 \\ -\frac{13}{40h} & \text{dacă } |k - l| = 3, k \text{ de forma } 3k_1 \\ \frac{54}{5h} & \text{dacă } k = l, k \text{ de forma } 3k_1 + 1, 3k_1 + 2 \\ -\frac{297}{40h} & \text{dacă } l - k = 1, k \text{ de forma } 3k_1 + 1 \\ -\frac{189}{40h} & \text{dacă } k - l = 1, k \text{ de forma } 3k_1 + 1 \\ \frac{27}{20h} & \text{dacă } l - k = 2, k \text{ de forma } 3k_1 + 1 \\ \frac{27}{20h} & \text{dacă } k - l = 2, k \text{ de forma } 3k_1 + 2 \\ -\frac{297}{40h} & \text{dacă } k - l = 1, k \text{ de forma } 3k_1 + 2 \\ -\frac{189}{40h} & \text{dacă } l - k = 1, k \text{ de forma } 3k_1 + 2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

și prin urmare

$$R = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{54}{5} & -\frac{297}{40} & \frac{27}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{297}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{189}{40} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{27}{20} & -\frac{189}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{189}{40} & \frac{27}{20} & -\frac{13}{40} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{189}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{297}{40} & \frac{27}{20} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{20} & -\frac{297}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{189}{40} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{40} & \frac{27}{20} & -\frac{189}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{189}{40} & \frac{27}{20} & -\frac{13}{40} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{27}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{297}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{54}{5} \end{pmatrix}.$$

Matricea R nu are mai mult de șapte elemente nenule pe o linie, fiind o matrice heptadiagonală.

Termenul liber F poate fi determinat prin calcul direct al lui $L(\varphi_k)$, atunci când acest lucru este posibil și nu presupune o muncă prea mare. În general însă se obișnuiește să se folosească o formulă de integrare numerică. Aceasta are avantajul unei mari generalități și a ușurinței programării. Trebuie însă folosită o metodă de integrare a cărei precizie să corespundă metodei.

4. Rezultate și comentarii numerice.

Exemplul 7.3: Considerăm

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{dacă } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

și rezolvăm sistemul (7.7).

Vom calcula exact termenul liber. Figura 7.9 reprezintă soluția exactă (trasată cu linie punctată) și aproximațiile ei (punctele îngroșate) obținute prin rezolvarea sistemului (7.7).

Pentru ilustrarea rezultatelor numerice vom alege puncte care nu sunt din triangulație, de exemplu $x_{j+1/4} = jh + \frac{h}{4}$, $1 \leq j \leq N-1$. Aproximațiile soluției în aceste puncte se calculează astfel

$$\begin{aligned} u(x_{j+1/4}) &\approx u_h(x_{j+1/4}) = \\ &= \frac{1}{384} (405\alpha_{3j+1} - 81\alpha_{3j+2} + 45\alpha_{3j} + 15\alpha_{3j+3}). \end{aligned}$$

Din tabelul 7.13 se observă că soluția s-a calculat cu precizie maximă (în limitele de afișare alese). Acest lucru se explică atât prin precizia metodei cât și formei particulare a soluției (este un polinom de grad doi pe porțiuni).

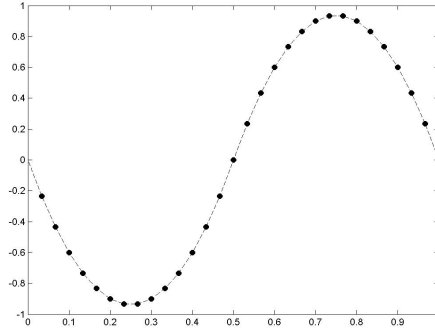


Figura 7.9: Aproximarea și soluția exactă în Exemplul 7.3.

Nodul	Aproximația	Soluția exactă	Eroarea
$x_{1+1/4}$	-0.70312500	-0.70312500	0.00000000
$x_{2+1/4}$	-0.92812500	-0.92812500	0.00000000
$x_{3+1/4}$	-0.85312500	-0.85312500	0.00000000
$x_{4+1/4}$	-0.47812500	-0.47812500	0.00000000
$x_{5+1/4}$	0.17812500	0.17812500	0.00000000
$x_{6+1/4}$	0.70312500	0.70312500	0.00000000
$x_{7+1/4}$	0.92812500	0.92812500	0.00000000
$x_{8+1/4}$	0.85312500	0.85312500	0.00000000

Tabelul 7.13: Valorile aproximațiilor cu $h = 1/10$ și elemente finite cubice comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 7.3.

7.1.4 Comparație a metodelor liniare, pătrățice și cubice

În această secțiune ne propunem să considerăm un nou exemplu pe care să-l tratăm cu fiecare dintre metodele expuse mai sus și să comparăm rezultatele aproximării.

Exemplul 7.4: Vom considera ecuația liniară (7.1) cu termenul neomogen

$$f(x) = 1000 \cos(15\pi x)$$

a cărei soluție este dată de

$$u(x) = \frac{1000}{225\pi^2} (\cos(15\pi x) + 2x - 1).$$

Vom rezolva pe rând sistemele (7.5), (7.6) și (7.7). Termenii liberi vor fi calculați

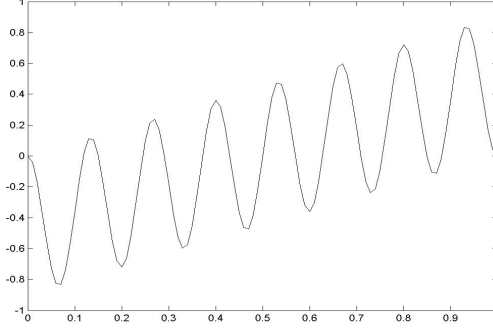


Figura 7.10: Soluția exactă în Exemplul 7.4.

cu o eroare de ordin h^7 , folosind formula de integrare numerică Newton-Cotes

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{90} \left(7g(a) + 32g\left(\frac{b+3a}{4}\right) + 12g\left(\frac{b+a}{2}\right) + 32g\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7g(b) \right).$$

Astfel, avem

$$\begin{aligned} L_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \approx \\ &\approx \frac{h}{90} \left(14f(x_j) + 6f(x_j - \frac{h}{2}) + 6f(x_j + \frac{h}{2}) + \right. \\ &\quad \left. + 24f(x_j - \frac{h}{4}) + 24f(x_j + \frac{h}{4}) + 8f(x_j - \frac{3h}{4}) + 8f(x_j + \frac{3h}{4}) \right), \end{aligned}$$

în cazul elementelor liniare

$$\begin{aligned} L_{2j} &= \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\varphi_{2j}(x)dx + \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x)\varphi_{2j}(x)dx \approx \\ &\approx \frac{h}{90} \left(14f(x_{2j}) + 12f(x_{2j} - \frac{h}{4}) + \right. \\ &\quad \left. + 12f(x_{2j} + \frac{h}{4}) - 4f(x_{2j} - \frac{3h}{4}) - 4f(x_{2j} + \frac{3h}{4}) \right), \\ L_{2j+1} &= \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x)\varphi_{2j+1}(x)dx \approx \end{aligned}$$

$$\approx \frac{h}{90} \left(24f(x_{2j} + \frac{h}{4}) + 12f(x_{2j} + \frac{h}{2}) + 24f(x_{2j} + \frac{3h}{4}) \right),$$

în cazul elementelor pătrate și

$$\begin{aligned} L_{3j} &= \int_{x_{3j-3}}^{x_{3j}} f(x) \varphi_{3j}(x) dx + \int_{x_{3j}}^{x_{3j+3}} f(x) \varphi_{3j}(x) dx \approx \\ &\approx \frac{h}{90} \left(14f(x_{3j}) + \frac{15}{4}f(x_{3j} + \frac{h}{4}) + \frac{15}{4}f(x_{3j} - \frac{h}{4}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4}f(x_{3j} - \frac{h}{2}) - \frac{3}{4}f(x_{3j} + \frac{h}{2}) + \frac{5}{4}f(x_j + \frac{3h}{4}) + \frac{5}{4}f(x_j + \frac{3h}{4}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{3j+1} &= \int_{x_{3j}}^{x_{3j+3}} f(x) \varphi_{3j+1}(x) dx \approx \\ &\approx \frac{h}{90} \left(\frac{405}{12}f(x_{3j} + \frac{h}{4}) + \frac{27}{4}f(x_{3j} + \frac{h}{2}) - \frac{81}{12}f(x_{3j} + \frac{3h}{4}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{3j+2} &= \int_{x_{3j}}^{x_{3j+3}} f(x) \varphi_{3j+2}(x) dx \approx \\ &\approx \frac{h}{90} \left(\frac{405}{12}f(x_{3j} + \frac{3h}{4}) + \frac{27}{4}f(x_{3j} + \frac{h}{2}) - \frac{81}{12}f(x_{3j} + \frac{h}{4}) \right), \end{aligned}$$

în cazul elementelor cubice.

În figura 7.10 este ilustrat graficul soluției exacte a ecuației (7.1).

Pasul	Eroarea cu elem. liniare	Eroarea cu elem. pătrate	Eroarea cu elem. cubice
$h = 1/10$	0.58393696	0.24840590	0.11147577
$h = 1/50$	0.03664240	0.00287431	0.00003576
$h = 1/100$	0.00932094	0.00036593	0.00000218
$h = 1/500$	0.00037491	0.00000295	0.00000000
$h = 1/1000$	0.00009374	0.00000037	0.00000000

Tabelul 7.14: Eroarea maximă în cele trei aproximări cu $h = 1/10, 1/50, 1/100, 1/500, 1/1000$ în Exemplul 7.4.

Rezultatele numerice obținute cu fiecare între cele trei metode sunt prezentate în tabelul 7.15 unde s-a considerat $h = \frac{1}{20}$. Observăm prin comparație cu valorile exacte prezentate în ultima coloană că precizia este mai mare în coloana doi, unde s-au folosit elemente finite pătrate, decât în prima coloană, unde au fost utilizate elemente finite liniare. Cele mai bune rezultate sunt cele din coloana a treia, rezultate prin folosirea elementelor finite cubice. Pentru ilustrarea valorilor aproximative ale soluției s-au considerat puncte de forma $x_{j+1/4} = jh + \frac{h}{4}$, $1 \leq j \leq N-1$.

Nodul	Aprox. liniară	Aprox. pătratică	Aprox. cubică	Sol. exactă
0.0625	-0.63321076	-0.82055094	-0.83716090	-0.83569049
0.1125	-0.26954623	-0.08220605	-0.09881602	-0.09881282
0.1625	-0.17782956	-0.25542841	-0.21532841	-0.21611118
0.2125	-0.51736411	-0.59496296	-0.63506295	-0.63335629
0.2625	0.02493052	0.21227070	0.22888066	0.22776339
0.3125	-0.24861842	-0.43595860	-0.41934864	-0.41905101
0.3625	-0.25021950	-0.17262065	-0.21272065	-0.21168937
0.4125	0.17943064	0.25702949	0.29712949	0.29561901
0.4625	-0.27274839	-0.46008858	-0.47669854	-0.47543740
0.5125	0.09091613	0.27825631	0.26164635	0.26144028
0.5625	0.18263280	0.10503396	0.14513396	0.14414191
0.5625	-0.15690175	-0.23450059	-0.27460059	-0.27310320
0.6125	0.38539288	0.57273307	0.58934303	0.58801649
0.6625	0.11184395	-0.07549623	-0.05888627	-0.05879791
0.7125	0.11024287	0.18784171	0.14774172	0.14856373
0.7625	0.53989301	0.61749185	0.65759185	0.65587211
0.8125	0.08771397	-0.09962621	-0.11623617	-0.11518430
0.8625	0.45137850	0.63871868	0.62210872	0.62169338

Tabelul 7.15: Valorile aproximațiilor cu elemente finite liniare, pătratice și cubice cu $h = 1/20$, comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 7.4.

Aproximațiile soluției în aceste puncte se calculează prin interpolarea celor obținute în urma rezolvării sistemelor liniare corespunzătoare, în modul următor

$$u(x_{j+1/4}) \approx u_h(x_{j+1/4}) = \frac{1}{4} (3\alpha_j + \alpha_{j+1}),$$

cu elemente liniare

$$u(x_{j+1/4}) \approx u_h(x_{j+1/4}) = \frac{1}{8} (3\alpha_{2j} + 6\alpha_{2j+1} - \alpha_{2j+2}),$$

cu elemente pătratice și

$$u(x_{j+1/4}) \approx u_h(x_{j+1/4}) = \frac{1}{384} (405\alpha_{3j+1} - 81\alpha_{3j+2} + 45\alpha_{3j} + 15\alpha_{3j+3}),$$

pentru elementele cubice.

În tabelul 7.14 sunt date erorile maxime obținute în urma aproximării soluției în punctele menționate mai sus, cu fiecare dintre cele trei metode și cu mai multe valori ale parametrului h . Se poate aprecia, în urma unei analize atente a rezultatelor din

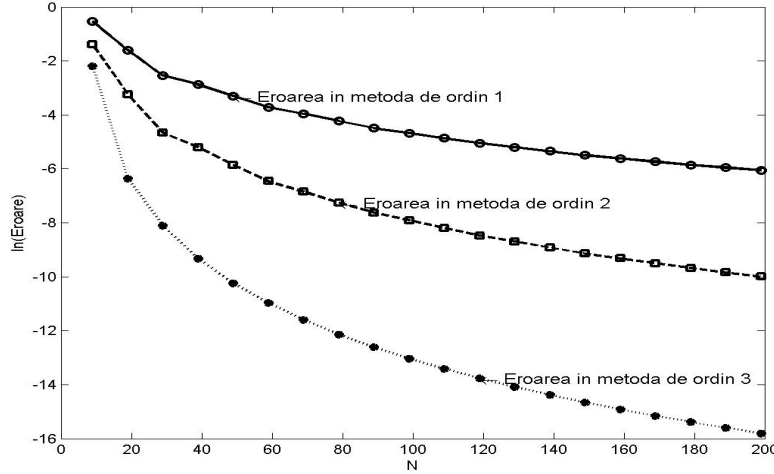


Figura 7.11: Eroarea cu cele trei metode în Exemplul 7.4.

acest tabel, că ordinele de convergență sunt h^2 pentru metoda linairă, h^4 pentru metoda pătratică și h^6 pentru metoda cubică. Să remarcăm de asemenea, că norma considerată este norma infinit.

Figura 7.11 arată evoluția erorii în cele trei aproximări, cu diferite alegeri ale parametrului N . Pe axa orizontală sunt date valorile lui N iar pe cea verticală este reprezentat logaritmul erorii. Să observăm din nou că se obține o eroare mult mai mică cu elemente pătratice decât cu elemente liniare. Cea mai mică eroare este obținută cu elemente cubice.

7.2 Ecuație cu coeficienți variabili și condiții la limită mixte

Fie $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$ și ecuația eliptică cu coeficienți variabili și condiții mixte Dirichlet-Neumann omogene

$$(7.8) \quad \begin{cases} -(\alpha(x)u_x)_x + \beta(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u(0) = 0, & u_x(1) = 0 \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta \in L^\infty(0, 1)$ au proprietatea că $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ și $\beta(x) \geq 0$ a.p.t. în $(0, 1)$.

Datorită condițiilor mixte Dirichlet-Neumann din (7.8) vom alege spațiul

$$V = H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}.$$

Formularea variațională corespunzătoare problemei (7.8) este

$$(7.9) \quad a(w, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V$$

unde

$$a(w, \varphi) = \int_0^1 \alpha(x) w_x(x) \varphi_x(x) dx + \int_0^1 \beta(x) w(x) \varphi(x) dx,$$

$$L(\varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx.$$

Să remarcăm că, spre deosebire de condiția Dirichlet care este prezentă în definiția spațiului V , condiția Neumann este cuprinsă în formularea variațională (7.9).

Este ușor de arătat că $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este biliniară, continuă, simetrică și coercivă iar $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ este liniară și continuă. Rezultă din teorema Lax-Milgram că există o unică soluție $w \in V$ a ecuației variaționale (7.9). Ne propunem să aproximăm această soluție cu ajutorul metodei elementului finit.

1. Alegerea elementelor finite. Dat fiind $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N+1}$, considerăm o diviziune echidistantă a intervalului Ω ,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1,$$

unde $x_j = jh$, $0 \leq j \leq N+1$.

Dacă $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, atunci $\mathcal{T}_h = \{K_j\}_{0 \leq j \leq N}$ este o triangulație a lui Ω . Asociem triangulației familia de elemente finite $\{K_j, \Sigma_j, P_j\}_{0 \leq j \leq N}$ definită astfel:

$$\Sigma_j = \{x_j, x_{j+1}\}, \quad P_j = \{v : K_j \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

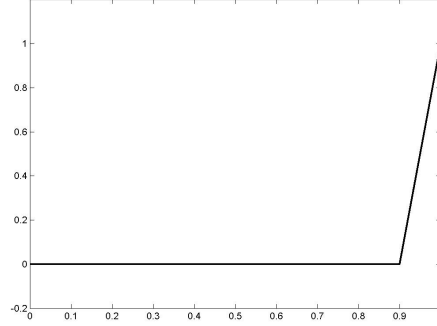
Am folosit elementele finite liniare introduse în 7.1.1.

2. Definirea spațiului de aproximații și alegerea unei baze.

Introducem spațiul de aproximații

$$V_h = \{\varphi \in \mathcal{C}[0, 1] : \varphi|_{K_j} \in P_j, \quad 0 \leq j \leq N, \quad \varphi(0) = 0\}.$$

Din teorema 6.1.1 rezultă că $V_h \subset H_D^1(\Omega)$. Să observăm că, la fel ca în cazul spațiului V , numai condiția Dirichlet este prezentă în definiția spațiului de aproximații V_h .

Figura 7.12: Funcția φ_{N+1} .

Pentru fiecare $1 \leq j \leq N$, definim funcția $\varphi_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ca în secțiunea 7.1.1. De asemenea, definim

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h} & \text{dacă } x \in (x_N, x_{N+1}) \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Din teorema 6.2.2 se obține că $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}\}$ este o bază în V_h și $\dim(V_h) = N + 1$.

3. Determinarea soluției aproximative. Soluția aproximativă $u_h \in V_h$ este dată de

$$u_h = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j \varphi_j,$$

$\alpha = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq N+1} \in \mathbb{R}^{N+1}$ fiind soluția sistemului

$$(7.10) \quad R\alpha = F$$

unde $R \in \mathcal{M}_{N+1}$ este matricea pătratică de elemente $R_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ iar $F \in \mathbb{R}^{N+1}$ este vectorul de elemente $F_j = L(\varphi_j)$.

După un calcul elementar obținem că

$$R_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x)(\varphi_i)^2(x)dx & i = j \neq N+1 \\ \frac{1}{h^2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} a(x)dx + \int_{x_N}^{x_{N+1}} b(x)(\varphi_{N+1})^2(x)dx & i = j = N+1 \\ -\frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x)\varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)dx & i = j+1 \\ -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx & i = j-1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Prin urmare, matricea R a sistemului (7.10) este din nou o matrice tridiagonală. Ea diferă de cea din exemplele precedente prin faptul că nu mai are elementele constante de-a lungul diagonalelor. Aceste elemente se calculează direct sau se aplică o formulă de integrare numerică. Vom alege acesastă ultimă posibilitate și vom folosi metoda Simpson. Va rezulta că

$$R_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6h^2} [a(x_{i-1}) + 4a(x_{i-1} + h/2) + 2a(x_i) + 4a(x_i + h/2) + a(x_{i+1})] \\ \quad \text{dacă } i = j \neq N+1 \\ \frac{1}{6h^2} [a(x_N) + 4a(x_N + h/2) + a(x_{N+1})] \\ \quad \text{dacă } i = j = N+1 \\ -\frac{1}{6h^2} [a(x_{i-1}) + 4a(x_{i-1} + h/2) + a(x_i)] \\ \quad \text{dacă } i = j+1 \\ -\frac{1}{6h^2} [a(x_i) + 4a(x_i + h/2) + a(x_{i+1})] \\ \quad \text{dacă } i = j-1 \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases}$$

De asemenea, termenul liber F poate fi determinat fie prin calcul direct al lui $L(\varphi_j)$ fie folosind o formulă de intergrare numerică. Vom folosi, ca mai înainte, formula lui Simpson:

$$F_j \approx \begin{cases} \frac{h}{3} [f(x_{i-1} + h/2) - cb(x_{i-1} + h/2) + f(x_i) - cb(x_i) + \\ \quad + f(x_{i+1} - h/2) - cb(x_{i+1} - h/2)], \text{ dacă } j \neq N+1 \\ \frac{h}{6} [2f(x_N + h/2) - 2cb(x_N + h/2) + \\ \quad + f(x_{N+1}) - cb(x_{N+1})] + a(1)d, \text{ dacă } j = N+1. \end{cases}$$

4. Rezultate și comentarii numerice.

Exemplul 7.5: Considerăm că

$$a(x) = \frac{1}{4}(1 + x^2),$$

$$b(x) = 3x,$$

$$f(x) = 1 - 2x + 6x^2 - 9x^3 + 3x^4$$

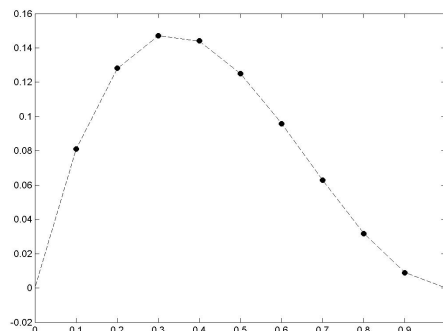


Figura 7.13: Aproximarea și soluția exactă în Exemplul 7.5.

și observăm că (7.8) are soluția exactă

$$u(x) = x(1 - x)^2.$$

Rezolvând sistemul (7.10) se obțin rezultatele numerice din tabelul 7.16. Figura 7.13 reprezintă soluția exactă (trasată cu linie punctată) și aproximațiile ei (punctele îngoșate) obținute mai sus.

Nodul	Aproximația	Soluția exactă	Eroarea
x_1	0.08113302	0.08100000	0.00013302
x_2	0.12818767	0.12800000	0.00018767
x_3	0.14716791	0.14700000	0.00016791
x_4	0.14409085	0.14400000	0.00009085
x_5	0.12498131	0.12500000	0.00001869
x_6	0.09586747	0.09600000	0.00013253
x_7	0.06277825	0.06300000	0.00022175
x_8	0.03174232	0.03200000	0.00025768
x_9	0.00878831	0.00900000	0.00021169
x_{10}	-0.00005437	0.00000000	0.00005437

Tabelul 7.16: Valorile aproximative comparate cu valorile exacte ale soluției în Exemplul 7.5.

Să observăm că în acest caz nu mai avem fenomenul de superconvergență și eroarea aproximației soluției este de ordin h^2 . S-ar fi putut folosi, cu rezultate numerice similare, metoda trapezelor în locul metodei lui Simpson.

7.3 Ecuație de ordin patru

În acest capitol vom folosi metoda elementului finit pentru aproximarea soluției unei ecuații de ordin patru. Deși vor apărea unele diferențe în raport cu ecuațiile de ordin doi, după cum se va putea vedea, ideile sunt în linii mari aceleași. Cea mai importantă diferență este legată de faptul că se vor folosi spații V_h nu doar de funcții continue, ca până acum, ci de funcții de clasă C^1 . De asemenea, se va realiza nu doar aproximarea soluției u ci și a derivatei sale u_x . În exemplul de mai jos vom sublinia și analiza toate aceste etape.

Pentru $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ și $f \in L^2(\Omega)$, considerăm ecuația de ordin patru cu condiții la limită omogene

$$(7.11) \quad \begin{cases} u_{xxxx} = f, & x \in \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Observați că, spre deosebire de problemele tratate până acum, în ecuația (7.11) apar patru derivate iar condițiile la limită se referă atât la u cât și la u_x . După cum am văzut în secțiunea 3.5, (7.11) reprezintă poziția unei bare elastice asupra căreia acționează forța f . Funcția u va descrie deformarea barei.

Formularea variațională a lui (7.11) a fost prezentată și studiată în capitolul 3. Astfel, soluția este căutată în spațiul

$$V = H_0^2(\Omega)$$

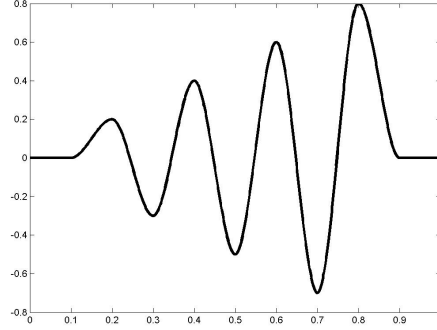
iar formularea variațională corespunzătoare este

$$(7.12) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V$$

unde

$$a(u, \varphi) = \int_0^1 u_{xx}(x) \varphi_{xx}(x) dx, \quad L(\varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx.$$

Știm deja că $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este biliniară, continuă, simetrică și coercivă iar $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ este liniară și continuă. Rezultă din teorema Lax-Milgram că există o unică soluție $u \in V$ a ecuației variaționale (7.12). Ne propunem să aproximăm această soluție cu ajutorul metodei elementului finit. Vom parcurge aceiași pași ca mai înainte, cu modificările de rigoare datorate spațiului diferit în care lucrăm.

Figura 7.14: Exemplu de funcție din V_h .

1. Alegerea elementelor finite. Fie $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N+1}$. Considerăm o diviziune echidistantă a intervalului Ω ,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1,$$

unde $x_j = jh$, $0 \leq j \leq N+1$.

Dacă $K_j = [x_j, x_{j+1}]$ atunci $\mathcal{T}_h = \{K_j\}_{0 \leq j \leq N}$ este o triangulație a lui Ω .

Asociem triangulației familia de elemente finite $\{K_j, \Sigma_j, P_j\}_{0 \leq j \leq N}$ definită astfel:

$$\Sigma_j = \{x_j, x_{j+1}\},$$

$$P_j = \{v : K_j \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Observați că mulțimile Σ_j nu sunt P_j -unisolvente de această dată. Pentru ecuațiile de ordin patru condiția de unisolvență trebuie modificată în felul următor:

Σ este P -unisolventă dacă pentru orice scalari $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$, $(\beta_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ există o unică funcție $v \in P$ astfel încât $v(a_i) = \alpha_i$, $v_x(a_i) = \beta_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, d\}$.

2. Definirea spațiului de aproximații și alegerea unei baze.

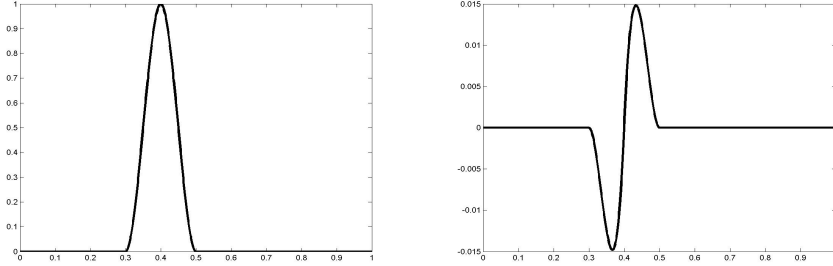
Folosind elementele finite de mai sus, definim spațiul de aproximații

$$V_h = \{\varphi \in \mathcal{C}^1[0, 1] : \varphi|_{K_j} \in P_j, \varphi'|_{K_j} \in P_j, 0 \leq j \leq N,$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0\}.$$

Dacă $v \in V_h$, din teorema 6.1.1 rezultă că $v \in H_0^1(\Omega)$. Mai mult, aplicând aceeași teoremă lui v_x , obținem că $v_x \in H_0^1(\Omega)$. Prin urmare,

$$V_h \subset H_0^2(\Omega).$$


 Figura 7.15: Funcțiile ϕ_j și ψ_j .

Să observăm că a fost necesară considerarea de funcții din $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ în definiția spațiului V_h , pentru a avea garantată incluziunea lui în $H_0^2(\Omega)$, spațiu în care se găsește soluția ecuației. Aici rezidă principala diferență în aplicarea metodei la probleme de ordin patru. Nu vom mai lucra doar cu funcții continue ca până acum, ci va trebui să considerăm funcții de clasă $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. În figura 7.14 am schițat graficul unei funcții din V_h .

Pentru fiecare $1 \leq j \leq N$, definim funcțiile $\phi_j, \psi_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca

$$\phi_j \in V_h, \quad \phi_j(x_i) = \delta_{ji}, \quad \phi_j'(x_i) = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N+1\}.$$

$$\psi_j \in V_h, \quad \psi_j'(x_i) = \delta_{ji}, \quad \psi_j(x_i) = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N+1\}.$$

Funcțiile ϕ_j și ψ_j sunt date analitic de expresiile

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h^3} (2(x_j - x) + h) (x - x_{j-1})^2 & \text{dacă } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h^3} (2(x - x_j) + h) (x - x_{j+1})^2 & \text{dacă } x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0 & \text{în celelalte cazuri,} \end{cases}$$

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h^2} (x - x_j)(x - x_{j-1})^2 & \text{dacă } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h^2} (x - x_j)(x - x_{j+1})^2 & \text{dacă } x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Este ușor de arătat că $\{\phi_1, \psi_1, \dots, \phi_N, \psi_N\}$ constituie o bază în V_h și prin urmare $\dim(V_h) = 2N$.

3. Determinarea soluției aproximative. Soluția aproximativă $u_h \in V_h$ se scrie sub forma

$$(7.13) \quad u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j^1 \phi_j + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \psi_j,$$

fiind complet determinată dacă se cunosc coeficienții $\alpha_j^1, \alpha_j^2 \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$.
Ea trebuie să verifice

$$(7.14) \quad a(u_h, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_h,$$

ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă

$$(7.15) \quad a(u_h, \phi_j) = L(\phi_j), \quad a(u_h, \psi_j) = L(\psi_j), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Vom renumera funcțiile din bază și coeficienții din (7.13) în felul următor:

$$\begin{aligned} \varphi_{2j-1} &= \phi_j, \quad \varphi_{2j} = \psi_j, \quad 1 \leq j \leq N, \\ \alpha_{2j-1} &= \alpha_j^1, \quad \alpha_{2j} = \alpha_j^2, \quad 1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Prin urmare, $\alpha = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq 2N} \in \mathbb{R}^{2N}$ se determină ca fiind soluția sistemului

$$(7.16) \quad R\alpha = F$$

unde $R \in \mathcal{M}_{2N}$ este matricea pătratică de elemente $R_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ iar $F \in \mathbb{R}^{2N}$ este vectorul de elemente $F_j = L(\varphi_j)$.

După un calcul elementar, obținem că

$$R_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} \frac{24}{h^3} & \text{dacă } i = j, \text{ } i \text{ impar} \\ \frac{8}{h} & \text{dacă } i = j, \text{ } i \text{ par} \\ -\frac{12}{h^3} & \text{dacă } |i - j| = 2, \text{ } i \text{ impar} \\ \frac{2}{h} & \text{dacă } |i - j| = 2, \text{ } i \text{ par} \\ \frac{6}{h^2} & \text{dacă } j = i + 3, \text{ } i \text{ impar} \\ \frac{6}{h^2} & \text{dacă } j = i - 3, \text{ } i \text{ par} \\ -\frac{6}{h^2} & \text{dacă } j = i + 1, \text{ } i \text{ par} \\ -\frac{6}{h^2} & \text{dacă } j = i - 1, \text{ } i \text{ impar} \\ 0 & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$$

și prin urmare

$$R = \begin{pmatrix} \frac{24}{h^3} & 0 & -\frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{h} & -\frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} & \frac{24}{h^3} & 0 & -\frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & 0 & \frac{8}{h} & -\frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} & \frac{24}{h^3} & 0 & -\frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & 0 & \frac{8}{h} & -\frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{24}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{8}{h} \end{pmatrix}.$$

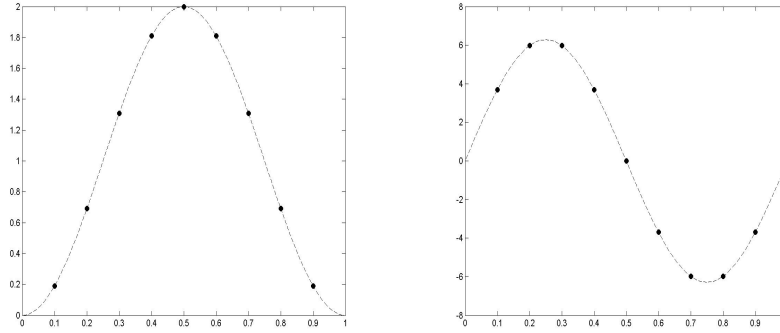


Figura 7.16: Deformarea și derivata: valoarea exactă și aproximațiile cu $h = 1/10$.

Matricea R a sistemului (7.16), nu are mai mult de cinci elemente nenule pe o linie, fiind o matrice heptadiagonală.

Termenul liber F se determină de obicei prin utilizarea unei formule de integrare aproximativă. De exemplu, prin folosirea formulei lui Simpson, avem că

$$\begin{aligned} L(\varphi_j) &= \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \approx \\ &\approx \frac{h}{6} [f(x_{j-1})\varphi_j(x_{j-1}) + 4f(x_j - h/2)\varphi_j(x_j - h/2) + f(x_j)\varphi_j(x_j)] + \\ &+ \frac{h}{6} [f(x_j)\varphi_j(x_j) + 4f(x_j + h/2)\varphi_j(x_j + h/2) + f(x_{j+1})\varphi_j(x_{j+1})]. \end{aligned}$$

Va rezulta că

$$F_j = \begin{cases} \frac{h}{3} [f(x_j) + f(x_j - h/2) + f(x_j + h/2)] & \text{dacă } j \text{ impar} \\ \frac{h^2}{12} [f(x_j + h/2) - f(x_j - h/2)] & \text{dacă } j \text{ par} . \end{cases}$$

Cu aceasta sistemul (7.16) este determinat și se poate trece la calcularea soluției lui.

4. Rezultate și comentarii numerice.

Exemplul 7.6: Considerăm

$$f(x) = -16\pi^4 \cos(2\pi x),$$

Nodul	Aprox. u	Aprox. u_x	Soluția exactă	Derivata exactă
x_1	0.19098301	3.69316366	0.19098301	3.69316366
x_2	0.69098301	5.97566433	0.69098301	5.97566433
x_3	1.30901699	5.97566433	1.30901699	5.97566433
x_4	1.80901699	3.69316366	1.80901699	3.69316366
x_5	2.00000000	-0.00000000	2.00000000	-0.00000000
x_6	1.80901699	-3.69316366	1.80901699	-3.69316366
x_7	1.30901699	-5.97566433	1.30901699	-5.97566433
x_8	0.69098301	-5.97566433	0.69098301	-5.97566433
x_9	0.19098301	-3.69316366	0.19098301	-3.69316366

Tabelul 7.17: Valorile aproximațiilor pentru u și u_x cu $h=1/10$ comparate cu valorile exacte în Exemplul 7.6.

ceea ce ne permite să găsim soluția exactă

$$u(x) = 1 - \cos(2\pi x).$$

Pentru determinarea termenului liber s-au calculat exact integralele:

$$\begin{aligned}
L_{2i-1} &= -\frac{12\pi}{h^2} (\sin(2\pi x_{i-1}) - \sin(2\pi x_{i+1})) + \\
&+ \frac{12}{h^3} (\cos(2\pi x_{i-1}) - 2\cos(2\pi x_i) + \cos(2\pi x_{i+1})) \\
L_{2i} &= \frac{4\pi}{h} (\sin(2\pi x_{i-1}) + 4\sin(2\pi x_i) + \sin(2\pi x_{i+1})) + \\
&- \frac{6}{h^2} (\cos(2\pi x_{i-1}) - \cos(2\pi x_{i+1})).
\end{aligned}$$

În figura 7.16 prezentăm graficul funcției deformare u și tangentei u_x : soluția exactă cu linie punctată și aproximațiile numerice folosind $h = 1/10$ cu puncte îngroșate.

În tabelul 7.17 sunt date valorile aproximative ale soluției și ale derivatei sale în nodurile triangulației. Pentru comparație, în ultima coloană sunt specificate valorile exacte. Se observă că s-au obținut rezultate exacte, fapt care se datorează din nou fenomenului de superconvergență.

În tabelul 7.18 sunt date erorile maxime comise în aproximarea soluției și ale derivatei sale, cu diferite valori ale lui h . S-au considerat puncte diferite de nodurile triangulației, $y_j = jh + \frac{h}{2}$. Valorile aproximative se obțin cu formula de interpolare

$$\begin{aligned}
u(y_j) &\approx u_h(y_j) = \\
&= \alpha_{2j-1}\varphi_{2j-1}(y_j) + \alpha_{2j+1}\varphi_{2j+1}(y_j) + \alpha_{2j}\varphi_{2j}(y_j) + \alpha_{2j+2}\varphi_{2j+2}(y_j) =
\end{aligned}$$

Pasul h	Eroarea în soluție	Eroarea în derivată
$\frac{1}{10}$	0.00038347	0.00050764
$\frac{1}{30}$	0.00000498	0.00000629
$\frac{1}{60}$	0.00000031	0.00000039
$\frac{1}{90}$	0.00000006	0.00000008

Tabelul 7.18: Eroarea maximă în aproximarea deformării și a derivatei în puncte situate între nodurile triangulației în Exemplul 7.6.

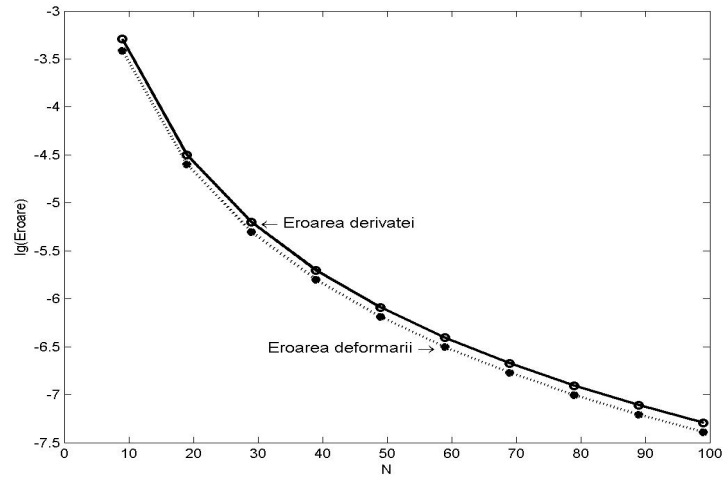


Figura 7.17: Eroarea în aproximarea deformării și a derivatei cu diferite valori ale lui N .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\alpha_{2j-1} + \alpha_{2j+1}) + \frac{h}{8}(\alpha_{2j} - \alpha_{2j+2}), \\
&u'(y_j) \approx u'_h(y_j) = \\
&= \alpha_{2j-1}\varphi'_{2j-1}(y_j) + \alpha_{2j+1}\varphi'_{2j+1}(y_j) + \alpha_{2j}\varphi'_{2j}(y_j) + \alpha_{2j+2}\varphi'_{2j+2}(y_j) = \\
&= \frac{1}{2h}(5\alpha_{2j-1} + 3\alpha_{2j+1}) - \frac{1}{4}(\alpha_{2j} + \alpha_{2j+2}).
\end{aligned}$$

În tabelul 7.18 se observă că eroarea este mai mare în coloana 2 decât în coloana 3. Prin urmare, soluția se aproximează mai bine decât derivata. Oricum, ordinul de aproximare este același.

Graficul 7.17 ilustrează datele numerice din tabelul 7.18 și arată cum evoluează eroarea în funcție de diferite valori ale lui N .

Capitolul 8

Ecuatii în dimensiune doi

În acest capitol vom aplica metoda elementului finit pentru aproximarea soluțiilor ecuațiilor eliptice în cazul bidimensional. Vom prezenta și vom discuta rezultatele numerice pentru diferite exemple de ecuații și tipuri de elemente finite.

Complexitatea procesului de aproximare devine mai mare atunci când trecem de la ecuații în dimensiune unu la ecuații în dimensiune doi. Acest lucru este datorat pe de o parte problemei triangularizării domeniului care nu mai este atât de trivială ca în cazul unidimensional iar pe de altă parte creșterii dimensiunii sistemului de ecuații liniare la care se ajunge. Astfel, va fi nevoie de instrumente care să poată genera triangularizări ale celor mai variate domenii și de metode speciale de stocare și rezolvare a sistemelor care, ținând cont de structura particulară a acestora, să reducă pe cât posibil volumul de calcul și de memorie necesar.

După descrierea pașilor procesului de aproximare, vom oferi exemple concrete care admit soluții explicite, pentru a avea posibilitatea comparării soluției exacte cu aproximația găsită. Având în vedere acest obiectiv, domeniul ales va fi unul foarte simplu iar triangularizația imediată.

8.1 Ecuație cu condiții Dirichlet omogene

Fiind date $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ și $f \in L^2(\Omega)$, considerăm ecuația eliptică cu condiții Dirichlet omogene

$$(8.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Soluția lui (8.1) va aparține spațiului

$$V = H_0^1(\Omega)$$

iar formularea ei variațională este dată de

$$(8.2) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V$$

unde

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \nabla \varphi(x, y) dx dy, \quad L(\varphi) = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Evident, (8.1) este un caz particular al ecuației (3.8) din capitolul 3. Am văzut că $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este biliniară, continuă, simetrică și coercivă iar $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ este liniară și continuă. Prin urmare, există o unică soluție $u \in V$ a ecuației variaționale (8.2).

În continuare vom aproxima soluția u a lui (8.2) cu ajutorul metodei elementului finit, urmând pașii cu care cititorul s-a familiarizat deja în cazul problemelor în dimensiune unu. Pentru aceasta vom folosi două tipuri diferite de elemente finite, simplexuri și paralelotopuri.

8.1.1 Elemente finite simplexuri

Prezentăm acum o primă posibilitate de alegere a elementelor finite, care are la bază alegerea ca element finit de referință a unui simplex.

Alegerea elementelor finite. Dat fiind $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N+1}$, considerăm o rețea de puncte echidistante,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1,$$

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N < y_{N+1} = 1,$$

unde $x_i = ih$ și $y_j = jh$, $0 \leq i, j \leq N+1$.

Notăm $T_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ și definim cele două triunghiuri care compun T_{ij} ,

$$T_{ij}^1 = \{(x, y) \in \Omega : x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}], x + y \leq x_i + y_{j+1}\},$$

$$T_{ij}^2 = \{(x, y) \in \Omega : x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}], x + y \geq x_i + y_{j+1}\}.$$

Vom observa imediat că $\mathcal{T}_h = \{T_{ij}^s\}_{s \in \{1,2\}, 0 \leq i,j \leq N}$ este o triangulație a lui Ω .

Asociem lui $\mathcal{T}_h$ familia de elemente finite $\{T_{ij}^s, \Sigma_{ij}^s, P_{ij}^s\}_{s \in \{1,2\}, 0 \leq i,j \leq N}$ definită astfel: pentru fiecare $s \in \{1,2\}$ și $0 \leq i,j \leq N$,

$$\Sigma_{ij}^s = \{\text{vârfurile triunghiului } T_{ij}^s\},$$

$$P_{ij}^s = \{v : T_{ij}^s \rightarrow \mathbb{R} : v(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Vom arăta că familia de elemente finite introdusă mai sus îndeplinește condițiile de clasă zero și de compatibilitate și este o familie regulată.

- Condiții de clasă zero: Considerând elementul finit $\{T_{ij}^s, \Sigma_{ij}^s, P_{ij}^s\}$, avem că
 - Fiind polinoame, funcțiile din P_{ij}^s sunt continue.
 - Restricțiile funcțiilor din P_{ij}^s la una dintre fețele triunghiurilor T_{ij}^s descriu mulțimea polinoamelor de o variabilă și de grad cel mult unu. Acestea sunt unic determinate de valorile în două puncte diferite, aparținând intersecției lui Σ_{ij}^s cu fața lui T_{ij}^s considerată.
- Condiții de compatibilitate: Fiind date două elemente finite adiacente și T' fața comună, avem că:
 - Pe T' se găsesc două puncte din mulțimile Σ , comune ambelor elemente.
 - Elementele din mulțimile P restricționate la T' formează mulțimea polinoamelor de o variabilă și de grad cel mult unu în ambele cazuri.
- De asemenea, familia de triangulații este regulată, fiecare element fiind afin echivalent cu 2-simplexul de tipul 1 definit în secțiunea 5.2. Celelalte condiții se verifică imediat.

Definirea spațiului de aproximații și alegerea unei baze.

Cu elementelor finite de mai sus, introducem spațiul de aproximații

$$V_h = \{\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \varphi|_{T_{ij}^s} \in P_{ij}^s, s \in \{1,2\}, 0 \leq i,j \leq N, \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Din Teorema 6.1.1 rezultă că $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Pentru fiecare $1 \leq i,j \leq N$, definim funcția $\varphi_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi_{ij} \in V_h, \quad \varphi_{ij}(x_p, y_r) = \delta_{ij}^{pr}, \quad 0 \leq p, r \leq N+1.$$

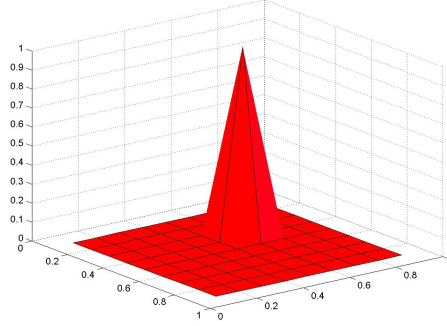


Figura 8.1: Funcția φ_{ij} .

Analitic, funcția φ_{ij} are următoarea expresie

$$\varphi_{ij}(x, y) = \begin{cases} 1 + i + j - \frac{x+y}{h} & \text{dacă } (x, y) \in T_{ij}^1 \\ 1 + j - \frac{y}{h} & \text{dacă } (x, y) \in T_{i-1j}^2 \\ 1 - i + \frac{x}{h} & \text{dacă } (x, y) \in T_{i-1j}^1 \\ 1 - i - j + \frac{x+y}{h} & \text{dacă } (x, y) \in T_{i-1j-1}^2 \\ 1 - j + \frac{y}{h} & \text{dacă } (x, y) \in T_{ij-1}^1 \\ 1 + i - \frac{x}{h} & \text{dacă } (x, y) \in T_{ij-1}^2 \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Teorema 6.2.2 asigură că $\{\varphi_{11}, \dots, \varphi_{NN}\}$ este o bază în V_h și $\dim(V_h) = N^2$.

Determinarea soluției aproximative. Soluția aproximativă $u_h \in V_h$ este dată de

$$u_h = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \varphi_{ij}.$$

Pentru determinarea necunoscutelelor $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathbb{R}^{N^2}$, ca soluții ale unui sistem liniar, este necesară renumerotarea lor cu un singur indice. Acest lucru trebuie realizat întotdeauna la problemele în dimensiune mai mare decât unu. Chiar la problema în dimensiune unu cu elemente finite pătratice sau cubice a fost întâlnită această necesitate.

Fiecărei perechi (i, j) îi asociem un indice k după formula $k = (j-1)N + i$. Astfel, atunci când (i, j) parcurge mulțimea $\{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$, indicele k parcurge $\{1, \dots, N^2\}$. Numerotarea aleasă nu este singura posibilă dar este

cea mai simplă și logică în acest caz. După renumerotarea funcțiilor din bază și a coeficienților, avem că

$$u_h = \sum_{k=1}^{N^2} \alpha_k \varphi_k.$$

Astfel, $\alpha \in \mathbb{R}^{N^2}$ este soluția sistemului

$$(8.3) \quad R\alpha = F$$

unde $R \in \mathcal{M}_{N^2}$ este matricea pătratică de elemente $R_{kl} = a(\varphi_l, \varphi_k)$ iar $F \in \mathbb{R}^{N^2}$ este vectorul de elemente $F_k = L(\varphi_k)$.

După un calcul elementar obținem că

$$R_{kl} = \begin{cases} 4 & \text{dacă } k = l \\ -1 & \text{dacă } |k - l| = N \text{ sau } k - l = 1, N \nmid (k - 1) \\ -1 & \text{dacă } |k - l| = N \text{ sau } l - k = 1, N \nmid k \\ 0 & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$$

și prin urmare

$$R = \begin{pmatrix} A & -I & O & O & \dots & O & O \\ -I & A & -I & O & \dots & O & O \\ O & -I & A & -I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & O & \dots & A & -I \\ O & O & O & O & \dots & -I & A \end{pmatrix}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

I este matricea identitate și O matricea nulă de dimensiune N .

Să remarcăm că matricea R a sistemului (8.3), deși poate avea dimensiunea N^2 foarte mare, nu are mai mult de patru elemente nenule pe o linie. De fapt ea este o matrice tridiagonală pe blocuri.

Pentru calculul termenului liber F se obișnuiește să se folosească o formulă de integrare numerică. Descriem în continuare două asemenea posibilități.

1. Metodă de ordin unu. Dacă T este triunghiul cu vârfurile A , B și C , următoarea formulă de integrare numerică este exactă pentru polinoamele de grad cel mult unu:

$$(8.4) \quad \int_T f(x, y) dx dy \approx \frac{S}{3} (f(A) + f(B) + f(C))$$

unde S este aria triunghiului T .

Aplicând acest procedeu de aproximare obținem că

$$\begin{aligned} L(\varphi_{ij}) &= \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_{ij}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{T_{ij}^1} + \int_{T_{i-1j}^2} + \int_{T_{i-1j}^1} + \int_{T_{i-1j-1}^1} + \int_{T_{ij-1}^1} + \int_{T_{ij-1}^2} \approx \\ &\approx F_{ij} = 6 \frac{h^2}{2} \frac{f(x_i, y_j)}{3} = h^2 f(x_i, y_j). \end{aligned}$$

2. Metodă de ordin doi. Dacă T este triunghiul cu vârfurile A , B și C următoarea formulă de integrare numerică este exactă pentru polinoamele de grad cel mult doi:

$$(8.5) \quad \int_T f(x, y) dx dy \approx \frac{S}{12} (f(A) + f(B) + f(C) + 9f(G))$$

unde S este aria triunghiului T iar G este centrul său de greutate.

Prin acest procedeu de aproximare obținem că

$$\begin{aligned} L(\varphi_{ij}) &= \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_{ij}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{T_{ij}^1} + \int_{T_{i-1j}^2} + \int_{T_{i-1j}^1} + \int_{T_{i-1j-1}^1} + \int_{T_{ij-1}^1} + \int_{T_{ij-1}^2} \approx \\ &\approx F_{ij} = \frac{h^2}{24} \left(6f(x_i, y_j) + 9f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_j + \frac{h}{3}\right) + \right. \\ &\quad \left. 9f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_j - \frac{h}{3}\right) + 9f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_j - \frac{2h}{3}\right) + 9f\left(x_i - \frac{h}{3}, y_j - \frac{h}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + 9f\left(x_i - \frac{2h}{3}, y_j + \frac{h}{3}\right) + 9f\left(x_i - \frac{h}{3}, y_j + \frac{2h}{3}\right) \right). \end{aligned}$$

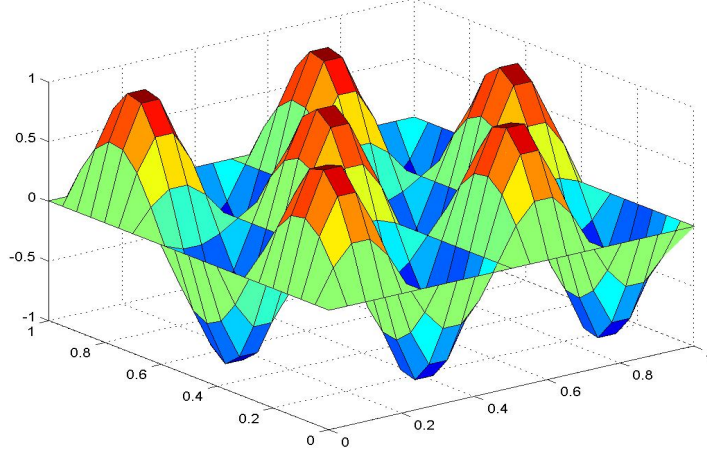


Figura 8.2: Soluția obținută cu $h = 1/20$ și simplexuri în Exemplul 8.1.

Alte formule numerice, bazate pe integrarea gaussiană vor fi prezentate în capitolul 9.

Rezultate și comentarii numerice.

- **Exemplul 8.1: Rezultate în nodurile triangulației.** Considerând termenul neomogen

$$f(x, y) = 25\pi^2 \sin(4\pi x) \sin(3\pi y),$$

ecuația (8.1) va avea soluția exactă

$$u(x, y) = \sin(4\pi x) \sin(3\pi y).$$

Pentru calculul termenului liber vom folosi formula aproximativă de ordin unu. Astfel, vom rezolva sistemul (8.3) cu:

$$F_{ij} = 25\pi^2 h^2 \sin(4\pi x_i) \sin(3\pi y_j).$$

Figura 8.2 reprezintă graficul soluției obținute folosind metoda descrisă cu $h = 1/20$.

Rezultate numerice detaliate se pot urmări în tabelul 8.1 unde sunt date, spre exemplificare, valorile aproximative în nodurile triangulației de forma (x_i, y_{10}) , $1 \leq i \leq N$. Pentru comparație, în ultima coloană sunt specificate valorile soluției exacte.

Figura 8.3 reprezintă soluția exactă în punctele (x, y_{10}) marcată cu linie punctată și aproximările ei obținute cu $h = \frac{1}{20}$, marcate cu steluțe.

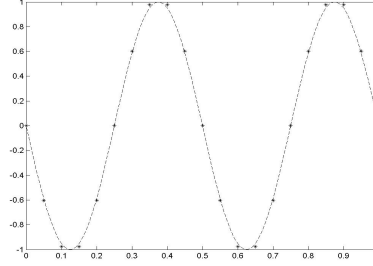


Figura 8.3: Soluția exactă și aproximațiile ei cu $h = 1/20$ și elemente finite simplexuri pentru $y = y_{10}$ în Exemplul 8.1.

Nodul	Aprox.	Soluția exactă	Eroarea
(x_1, y_{10})	-0.60433987	-0.58778525	0.01655462
(x_2, y_{10})	-0.97784245	-0.95105652	0.02678593
(x_3, y_{10})	-0.97784245	-0.95105652	0.02678593
(x_4, y_{10})	-0.60433987	-0.58778525	0.01655462
(x_5, y_{10})	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
(x_6, y_{10})	0.60433987	0.58778525	0.01655462
(x_7, y_{10})	0.97784245	0.95105652	0.02678593
(x_8, y_{10})	0.97784245	0.95105652	0.02678593
(x_9, y_{10})	0.60433987	0.58778525	0.01655462
(x_{10}, y_{10})	0.00000000	0.00000000	0.00000000
(x_{11}, y_{10})	-0.60433987	-0.58778525	0.01655462
(x_{12}, y_{10})	-0.97784245	-0.95105652	0.02678593
(x_{13}, y_{10})	-0.97784245	-0.95105652	0.02678593
(x_{14}, y_{10})	-0.60433987	-0.58778525	0.01655462
(x_{15}, y_{10})	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
(x_{16}, y_{10})	0.60433987	0.58778525	0.01655462
(x_{17}, y_{10})	0.97784245	0.95105652	0.02678593
(x_{18}, y_{10})	0.97784245	0.95105652	0.02678593
(x_{19}, y_{10})	0.60433987	0.58778525	0.01655462

Tabelul 8.1: Valorile aproximațiilor cu $h=1/20$ și elemente finite simplexuri, comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 8.1.

- **Exemplul 8.2: Rezultate în alte puncte decât nodurile triangulației.**
Să considerăm acum

$$f(x, y) = 50(x(1 - x) + y(1 - y))$$

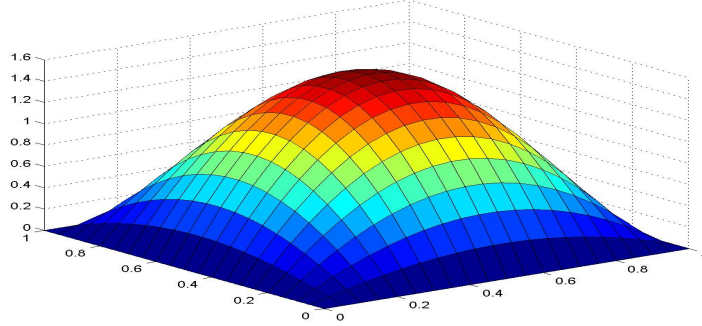


Figura 8.4: Soluția obținută cu $h = 1/20$ și simplexuri în Exemplul 8.2.

și să observăm că soluția exactă este dată de

$$u(x, y) = 25xy(1 - x)(1 - y).$$

Vom rezolva sistemul (8.3) cu termenul liber dat de formula de aproximare de ordinul unu:

$$F_j = 50h^2(x_i(1 - x_i) + y_j(1 - y_j)).$$

În Figura 8.4 prezentăm graficul soluției aproximative obținute folosind metoda de mai sus cu $h = 1/20$. Rezultate numerice detaliate se găsesc în tabelul 8.2 care cuprinde valorile aproximative cu $h = 1/20$ în nodurile triangulației de forma (x_j, y_{10}) . Pentru comparație, sunt date și valorile soluției exacte iar în ultima coloană eroarea.

Vom analiza în continuare și cazul altor puncte, diferite de nodurile triangulației. Mai precis, vom alege punctele $(x_{i+1/4}, y_{j+1/4}) = (ih + \frac{h}{4}, jh + \frac{h}{4})$, $2 \leq i, j \leq N - 1$. Aproximațiile soluției se calculează astfel

$$\begin{aligned} u(x_{i+1/4}, y_{j+1/4}) &\approx u_h(x_{i+1/4}, y_{j+1/4}) = \alpha_{ij}\varphi_{ij}(x_{i+1/4}, y_{j+1/4}) + \\ &+ \alpha_{i+1j}\varphi_{i+1j}(x_{i+1/4}, y_{j+1/4}) + \alpha_{ij+1}\varphi_{ij+1}(x_{i+1/4}, y_{j+1/4}) = \\ &= \frac{1}{4}(2\alpha_{ij} + \alpha_{i+1j} + \alpha_{ij+1}). \end{aligned}$$

Rezultatele numerice pentru punctele de forma $(x_{j+1/4}, y_{10+1/4})$ sunt date în tabelul 8.3. În coloana doi sunt date aproximațiile, în coloana trei sunt specificate valorile soluției exacte iar în ultima coloană erorile.

Figura 8.5 reprezintă soluția exactă pentru $y = y_{10h+1/4}$ marcată cu linie punctată și aproximațiile ei obținute cu $h = \frac{1}{20}$, marcate cu stelute.

Nodul	Aprox.	Soluția exactă	Eroarea
(x_1, y_{10})	0.27626865	0.29687500	0.02060635
(x_2, y_{10})	0.52737184	0.56250000	0.03512816
(x_3, y_{10})	0.75253369	0.79687500	0.04434131
(x_4, y_{10})	0.95100538	1.00000000	0.04899462
(x_5, y_{10})	1.12207366	1.17187500	0.04980134
(x_6, y_{10})	1.26506519	1.31250000	0.04743481
(x_7, y_{10})	1.37934676	1.42187500	0.04252824
(x_8, y_{10})	1.46432211	1.50000000	0.03567789
(x_9, y_{10})	1.51942629	1.54687500	0.02744871
(x_{10}, y_{10})	1.54411832	1.56250000	0.01838168
(x_{11}, y_{10})	1.53787286	1.54687500	0.00900214
(x_{12}, y_{10})	1.50017133	1.50000000	0.00017133
(x_{13}, y_{10})	1.43049317	1.42187500	0.00861817
(x_{14}, y_{10})	1.32830738	1.31250000	0.01580738
(x_{15}, y_{10})	1.19306513	1.17187500	0.02119013
(x_{16}, y_{10})	1.02419377	1.00000000	0.02419377
(x_{17}, y_{10})	0.82109299	0.79687500	0.02421799
(x_{18}, y_{10})	0.58313387	0.56250000	0.02063387
(x_{19}, y_{10})	0.58313387	0.56250000	0.02063387

Tabelul 8.2: Valorile aproximațiilor cu $h = \frac{1}{20}$ comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 8.2.

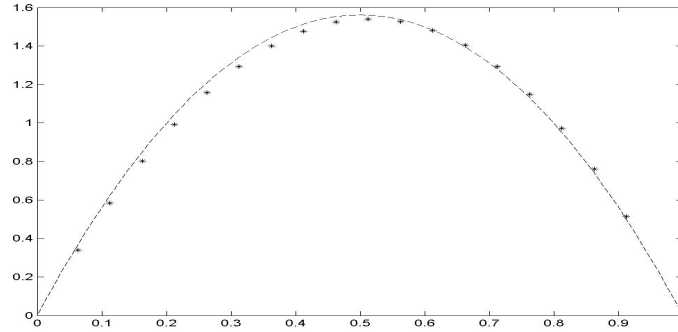


Figura 8.5: Soluția exactă și aproximațiile ei pentru $y = y_{10+1/4}$ obținută cu $h = 1/20$ și elemente finite simplexuri în Exemplul 8.2.

Nodul	Aprox.	Soluția exactă	Eroarea
$(x_{5/4}, y_{41/4})$	0.33892844	0.29668945	0.04223899
$(x_{9/4}, y_{41/4})$	0.58337469	0.56214844	0.02122625
$(x_{13/4}, y_{41/4})$	0.80165832	0.79637695	0.00528137
$(x_{17/4}, y_{41/4})$	0.99305903	0.99937500	0.00631597
$(x_{21/4}, y_{41/4})$	1.15689076	1.17114258	0.01425182
$(x_{25/4}, y_{41/4})$	1.29250471	1.31167969	0.01917498
$(x_{29/4}, y_{41/4})$	1.39928867	1.42098633	0.02169766
$(x_{33/4}, y_{41/4})$	1.47666337	1.49906250	0.02239913
$(x_{37/4}, y_{41/4})$	1.52407657	1.54590820	0.02183164
$(x_{41/4}, y_{41/4})$	1.54099559	1.56152344	0.02052785
$(x_{45/4}, y_{41/4})$	1.52689899	1.54590820	0.01900921
$(x_{49/4}, y_{41/4})$	1.48126770	1.49906250	0.01779480
$(x_{53/4}, y_{41/4})$	1.40357622	1.42098633	0.01741011
$(x_{57/4}, y_{41/4})$	1.29328425	1.31167969	0.01839544
$(x_{61/4}, y_{41/4})$	1.14982930	1.17114258	0.02131327
$(x_{65/4}, y_{41/4})$	0.97262091	0.99937500	0.02675409
$(x_{69/4}, y_{41/4})$	0.76103719	0.79637695	0.03533976
$(x_{73/4}, y_{41/4})$	0.51442463	0.56214844	0.04772381

Tabelul 8.3: Valorile aproximațiilor cu $h = \frac{1}{20}$ și elemente finite simplexuri, comparate cu valorile soluției exacte în puncte diferite de nodurile triangulației în Exemplul 8.2.

Concluzii: Să observăm că eroarea în nodurile triangulației este de același ordin cu eroarea în alte puncte, care nu sunt noduri ale triangulației. De asemenea, prin urmărirea cu atenție a rezultatelor numerice obținute se poate concluziona că eroarea în aproximare este de ordin h^2 .

8.1.2 Elemente finite paralelotopuri

Ne propunem să aproximăm soluția u folosind un tip de elemente finite diferit, care vor avea la bază un element finit paralelotop.

Alegerea elementelor finite. Dat fiind $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N+1}$, considerăm o rețea de puncte echidistante ca în exemplul precedent, $x_i = ih$ și $y_j = jh$, $0 \leq i, j \leq N+1$. Notăm $T_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ și observăm că $\mathcal{T}_h = \{T_{ij}\}_{0 \leq i, j \leq N}$ este o triangulație a lui Ω .

Asociem triangulației familia de elemente finite $\{T_{ij}, \Sigma_{ij}, P_{ij}\}_{0 \leq i, j \leq N}$ de-

finită astfel: pentru fiecare $0 \leq i, j \leq N$,

$$\Sigma_{ij} = \{\text{vârfurile pătratului } T_{ij}\},$$

$$P_{ij} = \{v : T_{ij} \rightarrow \mathbb{R} : v(x, y) = \alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Vom arăta că familia de elemente finite introdusă mai sus îndeplinește condițiile de clasă zero și de compatibilitate și este o familie regulată.

- Condiții de clasă zero: Considerând elementul finit $\{T_{ij}, \Sigma_{ij}, P_{ij}\}$, avem că
 - Fiind polinoame, funcțiile din P_{ij} sunt continue.
 - Restricțiile funcțiilor din P_{ij} la una dintre fețele lui T_{ij} descriu mulțimea polinoamelor de o variabilă și de grad cel mult unu. Acestea sunt unic determinate de valorile în două puncte diferite.
- Condiții de compatibilitate: Fiind date două elemente finite adiacente și T' fața comună, avem că:
 - Pe T' se găsesc două puncte din mulțimile Σ , comune ambelor elemente.
 - Elementele din mulțimile P restricționate la T' formează mulțimea polinoamelor de o variabilă în ambele cazuri.
- Familia de triangulații este regulată, elementele finite fiind afin echivalente cu un 2-paralelotope de tipul unu.

Definirea spațiului de aproximații și alegerea unei baze.

Cu ajutorul elementelor finite de mai sus, introducem spațiul de aproximații

$$V_h = \{\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \varphi|_{T_{ij}} \in P_{ij}, 0 \leq i, j \leq N, \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

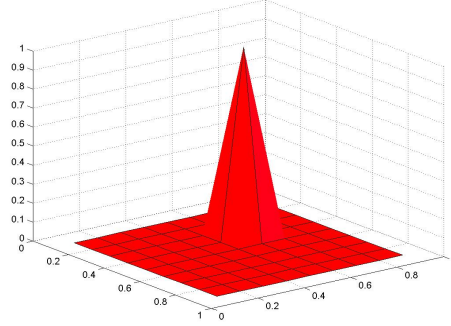
Din Teorema 6.1.1 rezultă că $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Pentru fiecare $1 \leq i, j \leq N$, definim funcția $\varphi_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi_{ij} \in V_h, \quad \varphi_{ij}(x_p, y_r) = \delta_{ij}^{pr}, \quad 0 \leq p, r \leq N + 1.$$

Analitic, funcția φ_{ij} are următoarea expresie:

$$\varphi_{ij}(x, y) = \begin{cases} (i+1)(j+1) - \frac{j+1}{h}x - \frac{i+1}{h}y + \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{ij} \\ -(i+1)(j-1) + \frac{j-1}{h}x + \frac{i+1}{h}y - \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{ij-1} \\ (i-1)(j-1) - \frac{j-1}{h}x - \frac{i-1}{h}y + \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{i-1j-1} \\ -(i-1)(j+1) + \frac{j+1}{h}x + \frac{i-1}{h}y - \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{i-1j} \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Figura 8.6: Funcția φ_{ij} .

Din teorema 6.2.2 rezultă că $\{\varphi_{11}, \dots, \varphi_{NN}\}$ este o bază în V_h și deci $\dim(V_h) = N^2$.

Determinarea soluției aproximative. Soluția aproximativă $u_h \in V_h$ este dată de

$$u_h = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \varphi_{ij}.$$

Ca și în cazul exemplului precedent, este necesară renumerotarea necunoscutelor cu un singur indice. Fiecărei perechi (i, j) îi asociem un indice k după formula $k = (j-1)N + i$. Astfel, atunci când (i, j) parcurge mulțimea $\{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$, indicele k parcurge $\{1, \dots, N^2\}$. Dacă renumerotăm atât funcțiile din bază cât și coeficienții, avem că

$$u_h = \sum_{k=1}^{N^2} \alpha_k \varphi_k.$$

Necunoscta vectorială $\alpha \in \mathbb{R}^{N^2}$ este soluția sistemului

$$(8.6) \quad R\alpha = F$$

unde $R \in \mathcal{M}_{N^2}$ este matricea pătratică de elemente $R_{kl} = a(\varphi_l, \varphi_k)$ iar $F \in \mathbb{R}^{N^2}$ este vectorul de elemente $F_k = L(\varphi_k)$.

După un calcul elementar obținem că

$$R_{kl} = \begin{cases} \frac{8}{3} & \text{dacă } k = l \\ -\frac{1}{3} & \text{dacă } k - l = N \text{ sau } k - l \in \{-N + 1, 1, N + 1\}, N \nmid (k - 1) \\ -\frac{1}{3} & \text{dacă } l - k = N \text{ sau } l - k \in \{-N + 1, 1, N + 1\}, N \nmid k \\ 0 & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$$

și prin urmare

$$R = \begin{pmatrix} A & B & O & O & & O & O \\ B & A & B & O & & O & O \\ O & B & A & B & & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ O & O & O & O & & A & B \\ O & O & O & O & & B & A \end{pmatrix}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

iar O matricea nulă de dimensiune N .

Matricea R a sistemului (8.6), are cel mult nouă elemente nenule pe o linie fiind o matrice tridiagonală pe blocuri.

Termenul liber F poate fi determinat prin calcul direct al lui $L(\varphi_k)$, dar mai ales prin folosirea unei formule de integrare numerică. Descriem în continuare două asemenea posibilități.

1. Metodă de ordin unu. Dacă T este pătrat cu vârfurile A, B, C și D , următoarea formulă de integrare numerică este exactă pentru polinoamele de grad cel mult unu:

$$(8.7) \quad \int_T f(x, y) dx dy \approx \frac{S}{4} (f(A) + f(B) + f(C) + f(D))$$

unde S este aria lui T .

Aplicând acest procedeu de aproximare obținem că

$$L(\varphi_{ij}) = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_{ij}(x, y) dx dy =$$

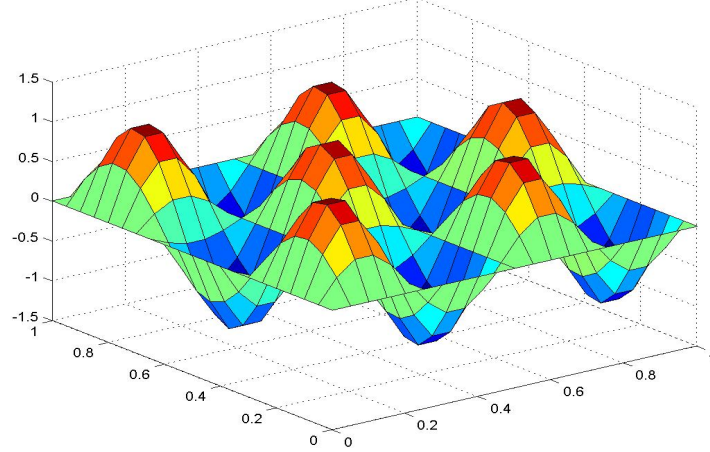


Figura 8.7: Soluția obținută cu $h = 1/20$ și elemente finite paraleltopuri.

$$\begin{aligned}
 &= \int_{T_{ij}} + \int_{T_{i-1j}} + \int_{T_{i-1j-1}} + \int_{T_{ij-1}} \approx \\
 &\approx F_{ij} = 4 \frac{h^2}{4} f(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j).
 \end{aligned}$$

2. Metodă de ordin doi. Dacă T este pătrat cu vârfurile A, B, C și D următoarea formulă de integrare numerică este exactă pentru polinoamele de grad cel mult doi:

$$(8.8) \int_T f(x, y) dx dy \approx \frac{S}{12} (f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + 8f(M))$$

unde S este aria pătratului T iar M este centrul său.

Aplicând acest procedeu de aproximare obținem că

$$\begin{aligned}
 L(\varphi_{ij}) &= \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_{ij}(x, y) dx dy = \\
 &= \int_{T_{ij}^1} + \int_{T_{i-1j}} + \int_{T_{i-1j-1}} + \int_{T_{ij-1}} \approx \\
 &\approx F_{ij} = \frac{h^2}{12} \left(4f(x_i, y_j) + 8f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}\right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$8f(x_i - \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}) + 8f(x_i - \frac{h}{2}, y_j - \frac{h}{2}) + 8f(x_i + \frac{h}{2}, y_j - \frac{h}{2}) \Bigg).$$

Exemple de integrare numerică folosind metoda Gauss vor fi prezentate în capitolul 9.

Rezultate numerice și comentarii.

- **Exemplul 8.1 (continuare):** Considerăm pentru ecuația (8.1) termenul neomogen

$$f(x, y) = 25\pi^2 \sin(4\pi x) \sin(3\pi y)$$

și soluția sa exactă

$$u(x, y) = \sin(4\pi x) \sin(3\pi y).$$

Pentru calculul termenului liber vom folosi formula aproximativă de ordin unu. Astfel, vom rezolva sistemul (8.3) cu:

$$F_{ij} = 25\pi^2 h^2 \sin(4\pi x_i) \sin(3\pi y_j).$$

În figura 8.7 am reprezentat graficul soluției obținute folosind metoda descrisă când $h = 1/20$.

Tabelul 8.4 cuprinde rezultatele numerice detaliate ale aproximațiilor soluției în nodurile triangulației de forma (x_i, y_{10}) , $1 \leq i \leq N$. Pentru comparație, în coloana trei sunt specificate valorile soluției exacte iar în ultima coloană erorile.

Figura 8.8 reprezintă soluția exactă în punctele (x, y_{10}) marcată cu linie punctată și aproximațiile ei obținute cu $h = \frac{1}{20}$, marcate cu steluțe.

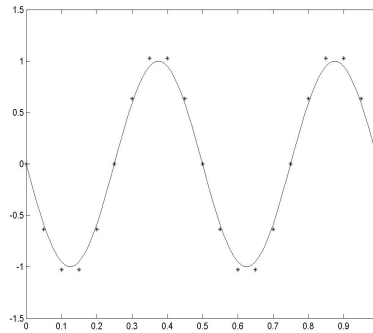


Figura 8.8: Soluția exactă și aproximațiile ei în $y = y_{10}$, obținute cu $h = 1/20$ și elemente finite paralelotopuri în Exemplul 8.1.

Nodul	Aprox.	Soluția exactă	Eroarea
(x_1, y_{10})	-0.63365343	-0.58778525	0.04586817
(x_2, y_{10})	-1.02527278	-0.95105652	0.07421627
(x_3, y_{10})	-1.02527278	-0.95105652	0.07421627
(x_4, y_{10})	-0.63365343	-0.58778525	0.04586817
(x_5, y_{10})	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
(x_6, y_{10})	0.63365343	0.58778525	0.04586817
(x_7, y_{10})	1.02527278	0.95105652	0.07421627
(x_8, y_{10})	1.02527278	0.95105652	0.07421627
(x_9, y_{10})	0.63365343	0.58778525	0.04586817
(x_{10}, y_{10})	0.00000000	0.00000000	0.00000000
(x_{11}, y_{10})	-0.63365343	-0.58778525	0.04586817
(x_{12}, y_{10})	-1.02527278	-0.95105652	0.07421627
(x_{13}, y_{10})	-1.02527278	-0.95105652	0.07421627
(x_{14}, y_{10})	-0.63365343	-0.58778525	0.04586817
(x_{15}, y_{10})	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
(x_{16}, y_{10})	0.63365343	0.58778525	0.04586817
(x_{17}, y_{10})	1.02527278	0.95105652	0.07421627
(x_{18}, y_{10})	1.02527278	0.95105652	0.07421627
(x_{19}, y_{10})	0.63365343	0.58778525	0.04586817

Tabelul 8.4: Valorile aproximațiilor în punctele (x_j, y_{10}) cu $h=1/20$ și folosind elemente finite paraleltopuri, comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 8.1.

- **Exemplul 8.3:** Considerăm $f(x, y) = 100(e^x - e^y)$ și observăm că soluția exactă este dată de

$$u(x) = 400 \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{n(1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n e)}{m(1 + n^2 \pi^2)} - \frac{m(1 - (-1)^n)(1 - (-1)^m e)}{n(1 + m^2 \pi^2)} \right).$$

Pentru calculul termenului liber vom folosi formula aproximativă de ordin unu. Astfel, vom rezolva sistemul (8.3) cu:

$$F_{ij} = 100h^2 (e^{x_i} - e^{y_j}).$$

Figura 8.9 reprezintă graficul soluției obținute folosind metoda descrisă cu $h = 1/20$ iar figura 8.10 reprezintă soluția exactă în punctele (x, y_{10}) desenată cu linie punctată și aproximațiile ei, marcate cu steluțe.

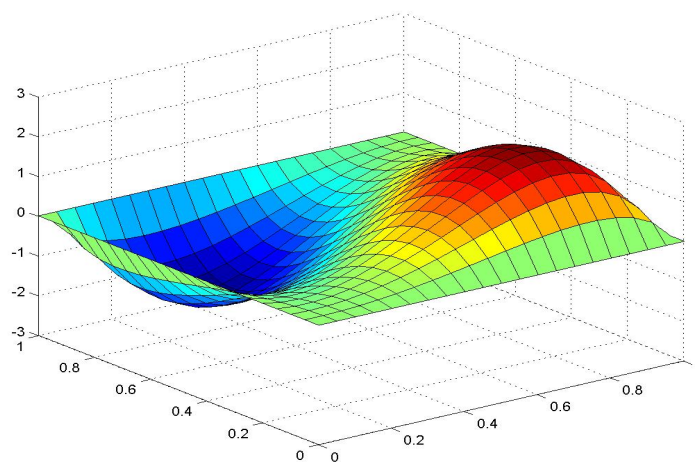


Figura 8.9: Soluția obținută cu $h = 1/20$ folosind elemente finite paraleltopuri în Exemplul 8.3.

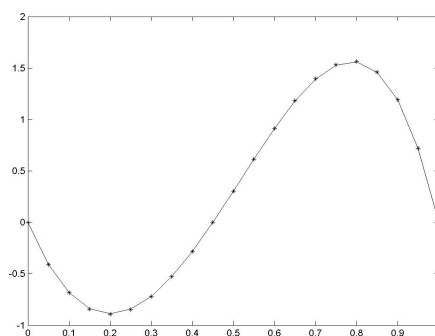


Figura 8.10: Soluția exactă și aproximațiile ei în $y = y_{10}$, obținute cu $h = 1/20$ și elemente finite paraleltopuri în Exemplul 8.3.

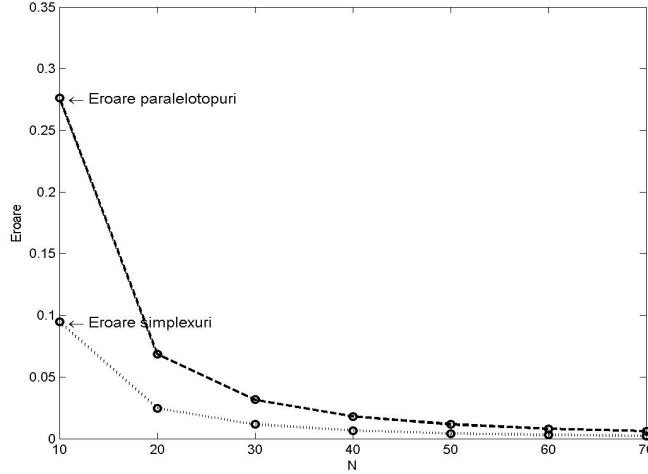


Figura 8.11: Eroarea în aproximațiile obținute cu simplexuri și paralelotopuri cu diferite valori ale lui N în Exemplul 8.1.

Concluzii: Să remarcăm că, aproximările cu elemente finite paralelotopuri sunt, din punct de vedere al preciziei, asemănătoare cu cele obținute prin folosirea elementelor finite simplexuri. În ambele cazuri eroarea este de ordin h^2 . Figura 8.11 ilustrează evoluția erorii în Exemplul 8.1, cu cele două tipuri de elemente finite și cu diferite valori ale lui N .

Avantajul simplexurilor este legat de o mai mare simplitate și de posibilitatea folosirii lor în triangulații de domenii mai generale. Paralelotopurile au o mai mare simetrie și vor fi cu predilecție folosite în cazul în care se dorește o separare a variabilelor.

8.2 Ecuație cu condiții mixte Dirichlet-Neumann

Fie $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$,

$$\Gamma_0 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\},$$

$f \in L^2(\Omega)$ și $u = u(x, y)$ soluția ecuației eliptice cu condiții mixte neomogene

$$(8.9) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{cases}$$

Datorită condițiilor mixte la limită, pentru rezolvarea lui (8.9) vom alege spațiul

$$V = H_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Formularea variațională corespunzătoare problemei (8.9) este

$$(8.10) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V$$

unde

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \nabla \varphi(x, y) dx dy,$$

$$L(\varphi) = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Este imediat că $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este biliniară, continuă, simetrică și coercivă iar $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ este liniară și continuă. Rezultă din teorema Lax-Milgram că există o unică soluție $u \in V$ a ecuației variaționale (8.10). Vom aproxima această soluție cu ajutorul metodei elementului finit.

Alegerea elementelor finite. Vom folosi elementele finite pătrate din secțiunea 8.1.2. Mai precis, dat $N \in \mathbb{N}^*$ și $h = \frac{1}{N+1}$, considerăm triangulația $\mathcal{T}_h = \{T_{ij}\}_{0 \leq i, j \leq N}$ a lui Ω , unde $T_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $x_i = ih$ și $y_j = jh$, $0 \leq i, j \leq N+1$.

Asociem triangulației familia de elemente finite $\{T_{ij}, \Sigma_{ij}, P_{ij}\}_{0 \leq i, j \leq N}$ definită astfel: pentru orice $0 \leq i, j \leq N$,

$$\Sigma_{ij} = \{\text{vârfurile pătratului } T_{ij}\},$$

$$P_{ij} = \{v : T_{ij} \rightarrow \mathbb{R} : v(x, y) = \alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

care îndeplinește condițiile de clasă zero și de compatibilitate și este o familie regulată (vezi secțiunea 8.1.2).

Definirea spațiului de aproximații și alegerea unei baze.

Cu ajutorul elementelor finite de mai sus, introducem spațiul de aproximații

$$V_h = \{\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \varphi|_{T_{ij}} \in P_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq N, \quad \varphi|_{\partial\Gamma_0} = 0\}.$$

Din Teorema 6.1.1 rezultă că $V_h \subset H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

Pentru fiecare $1 \leq i, j \leq N+1$, definim funcția $\varphi_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi_{ij} \in V_h, \quad \varphi_{ij}(x_p, y_r) = \delta_{ij}^{pr}, \quad 0 \leq p, r \leq N+1.$$

Expresiile analitice ale funcțiilor $(\varphi_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ sunt date în secțiunea 8.1.2. De asemenea, avem că

$$\begin{aligned}\varphi_{iN+1}(x, y) &= \begin{cases} -(i+1)N + \frac{N}{h}x + \frac{i+1}{h}y - \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{iN} \\ (i-1)N - \frac{N}{h}x - \frac{i-1}{h}y + \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{i-1N} \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \\ \varphi_{N+1j}(x, y) &= \begin{cases} N(j-1) - \frac{j-1}{h}x - \frac{N}{h}y + \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{Nj-1} \\ -N(j+1) + \frac{j+1}{h}x + \frac{N}{h}y - \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{Nj} \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \\ \varphi_{N+1N+1}(x, y) &= \begin{cases} N^2 - \frac{N}{h}x - \frac{N}{h}y + \frac{1}{h^2}xy, & (x, y) \in T_{NN} \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}\end{aligned}$$

Din teorema 6.2.2 $(\varphi_{ij})_{1 \leq i, j \leq N+1}$ este o bază în V_h și deci $\dim(V_h) = (N+1)^2$.

Determinarea soluției aproximative. Soluția aproximativă $u_h \in V_h$ este dată de

$$u_h = \sum_{i,j=1}^{N+1} \alpha_{ij} \varphi_{ij}.$$

După renumerotarea necunoscutelor și a funcțiilor din bază cu un singur indice, rezultă că

$$u_h = \sum_{k=1}^{(N+1)^2} \alpha_k \varphi_k.$$

Necunoscta vectorială $\alpha \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$ este soluția sistemului

$$(8.11) \quad R\alpha = F$$

unde $R \in \mathcal{M}_{(N+1)^2}$ este matricea pătratică de elemente $R_{kl} = a(\varphi_l, \varphi_k)$ iar $F \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$ este vectorul de elemente $F_k = L(\varphi_k)$.

După un calcul elementar obținem că

$$R_{kl} = \begin{cases} 8 & \text{dacă } k = l, (N+1) \nmid k \\ 4 & \text{dacă } k = l, (N+1) \mid k, k \neq (N+1)^2 \\ 3 & \text{dacă } k = l = (N+1)^2 \\ -\frac{1}{3} & \text{dacă } |k-l| \in \{1, N, N+1, N-1\}, k, l < (N+1)^2 \\ -\frac{1}{6} & \text{dacă } |k-l| \in \{1, N, N+1, N-1\}, \\ & k = (N+1)^2 \text{ sau } l = (N+1)^2 \\ 0 & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$$

și prin urmare

$$R = \begin{pmatrix} A & B & O & O & & O & O \\ B & A & B & O & & O & O \\ O & B & A & B & & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ O & O & O & O & & A & B \\ O & O & O & O & & B & A_1 \end{pmatrix}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}),$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$$

iar O matricea nulă de dimensiune $N + 1$.

Termenul liber F poate fi determinat prin folosirea unei formule de integrare numerică ca în secțiunea 8.1.2.

Rezultate numerice și comentarii.

Exemplul 8.4: Considerăm termenul neomogen pentru ecuația (8.9)

$$f(x, y) = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(y(y-1)^2 \frac{\pi^2}{4} - 6y - 4\right),$$

care va avea soluția exactă

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) y(y-1)^2.$$

Nodul	Aprox.	Soluția exactă	Eroarea
(x_1, y_{10})	0.05344066	0.05340122	0.00003944
(x_2, y_{10})	0.10655185	0.10647321	0.00007864
(x_3, y_{10})	0.15900611	0.15888875	0.00011736
(x_4, y_{10})	0.21048004	0.21032469	0.00015535
(x_5, y_{10})	0.26065629	0.26046391	0.00019238
(x_6, y_{10})	0.30922551	0.30899728	0.00022823
(x_7, y_{10})	0.35588826	0.35562559	0.00026267
(x_8, y_{10})	0.40035683	0.40006134	0.00029549
(x_9, y_{10})	0.44235707	0.44203058	0.00032649
(x_{10}, y_{10})	0.48163003	0.48127455	0.00035548
(x_{11}, y_{10})	0.51793358	0.51755131	0.00038227
(x_{12}, y_{10})	0.55104390	0.55063719	0.00040671
(x_{13}, y_{10})	0.58075685	0.58032821	0.00042864
(x_{14}, y_{10})	0.60688924	0.60644132	0.00044793
(x_{15}, y_{10})	0.62927996	0.62881551	0.00046445
(x_{16}, y_{10})	0.64779096	0.64731284	0.00047811
(x_{17}, y_{10})	0.66230811	0.66181928	0.00048883
(x_{18}, y_{10})	0.67274191	0.67224538	0.00049653
(x_{19}, y_{10})	0.67902803	0.67852686	0.00050117
(x_{20}, y_{10})	0.68112772	0.68062500	0.00050272

Tabelul 8.5: Valorile aproximațiilor cu $h = 1/20$, comparate cu valorile soluției exacte în Exemplul 8.4.

Figura 8.12 reprezintă graficul soluției obținute folosind metoda descrisă cu $h = 1/20$.

Tabelul 8.5 cuprinde aproximațiile soluției în punctele (x_i, y_{10}) , $1 \leq i \leq N + 1$. De asemenea, pentru comparație în ultimile două coloane sunt date valorile soluției exacte și respectiv eroarea.

Figura 8.13 reprezintă soluția exactă în punctele (x, y_{10}) marcată cu linie punctată și aproximațiile ei obținute cu $h = \frac{1}{20}$, marcate cu steluțe. Se poate observa că s-au obținut aproximări cu o eroare de ordin h^2 .

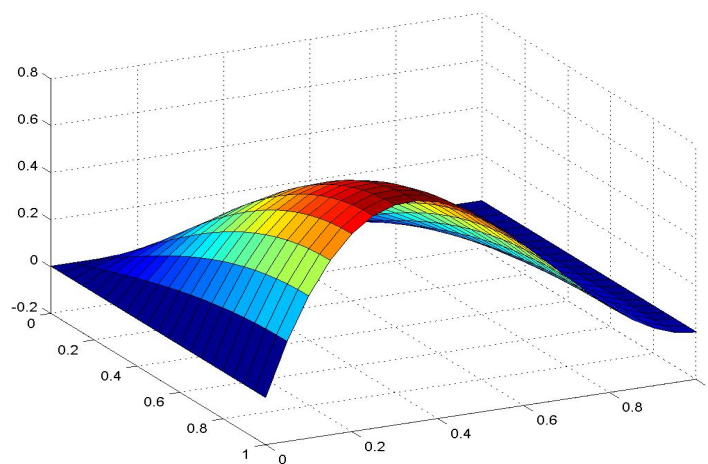


Figura 8.12: Soluția obținută cu $h = 1/20$ și elemente finite paraleltopuri în Exemplul 8.4.

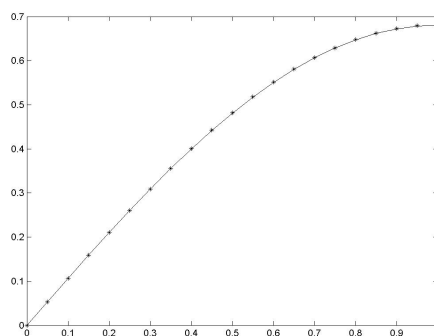


Figura 8.13: Soluția exactă și aproximațiile ei cu $h = 1/20$ și elemente finite paraleltopuri pentru $y = y_{10}$ în Exemplul 8.4.

Capitolul 9

Programarea metodei elementului finit

Acest capitol este dedicat prezentării celor mai importante aspecte ale programării metodei elementului finit. Vom considera etapele de bază ale procesului de obținere a aproximării și vom da o descriere algoritmică a lor. Se realizează astfel o structurare a metodei, importantă nu doar pentru cei ce vizează realizarea de programe ci și pentru cei ce doresc o înțelegere deplină a ei.

Există în prezent numeroase produse software care au la bază metoda elementului finit. Unele au o interfață foarte prietenoasă și o grafică deosebită dar funcționează precum “black boxes” în care se introduc date și se scot rezultate fără a putea vedea însă ce se petrece în interior. Altele arată întreaga succesiune de pași necesari obținerii aproximării dar pot fi mai puțin intuitive și mai greu de utilizat de către începători. Indiferent însă de construcția lor, toate programele de aproximare parcurg următoarele etape:

1. Definirea geometriei domeniului pe care se lucrează
2. Realizarea triangulației domeniului și obținerea datelor triangulației: vârfuri, laturi, elemente
3. Alegerea elementelor finite și numerotarea nodurilor
4. Construirea funcțiilor de bază
5. Determinarea matricii de rigiditate
6. Determinarea termenului liber

7. Rezolvarea sistemului de ecuații liniare

8. Afișarea și procesarea datelor numerice.

Nu ne vom propune prezentarea unui produs sau pachet software anume, ci vom încerca să descriem fiecare dintre etapele de mai sus. Cum etapele 7-8 sunt cuprinse în cursuri generale de analiză numerică, nu vom insista asupra lor. De asemenea, etapele 1-2 țin de programul folosit și de geometria domeniului și le vom descrie doar pe scurt. Ne vom concentra atenția mai ales asupra etapelor 3-6 care sunt caracteristice metodei elementului finit și care au ca scop construirea sistemului de ecuații liniare pornind de la datele triangulației.

Pentru simplificarea expunerii, vom considera cazul unui domeniu 2-dimensional Ω , iar pentru exemplificare vom alege ecuația lui Poisson cu condiții Dirichlet omogene în Ω .

9.1 Definirea geometriei

Definirea geometriei constă în introducerea unor parametri pe baza cărora să poată fi reconstruit domeniul Ω pe care lucrăm. Pentru aceasta, se definesc:

- nf : numărul de laturi (arce) ale frontierei domeniului Ω . Fiecare latură a frontierei va avea asociat un număr pozitiv de la 1 la nf . Vom nota cu NF vectorul $(1, 2, \dots, nf)$.

-o parametrizare a fiecărei laturi a frontierei. Astfel, pentru fiecare $s \in NF$, se introduc valorile inițială și finală ale parametrului, precum și funcțiile parametrice corespunzătoare. Acestea se vor alege astfel încât domeniul să fie la stânga laturii, dacă aceasta este parcursă în sensul parametrizării.

Exemplu: Pentru domeniul $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, vectorul NF este dat de $NF = (1, 2, 3, 4)$ iar descrierea frontierei este

$$\begin{aligned}\text{Latura 1 } (\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}) : & \quad t \in [0, 1], \quad x = t, \quad y = 0, \\ \text{Latura 2 } (\{(1, y) : 0 \leq y \leq 1\}) : & \quad t \in [0, 1], \quad x = 1, \quad y = t, \\ \text{Latura 3 } (\{(x, 1) : 0 \leq x \leq 1\}) : & \quad t \in [0, 1], \quad x = 1 - t, \quad y = 1, \\ \text{Latura 4 } (\{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}) : & \quad t \in [0, 1], \quad x = 0, \quad y = 1 - t.\end{aligned}$$

9.2 Realizarea triangulației

Există numeroase posibilități de realizare a unei triangulații. Cel mai simplu mod este acela de a începe cu o partiție grosieră a lui Ω formată din

câteva triunghiuri cât mai regulate (aproape echilaterale). Fiecare din acestea se împarte apoi în patru triunghiuri egale prin liniile lor mijlocii, proces cunoscut sub denumirea de rafinare a triangulației. Procedul de rafinare se repetă până când se atinge mărimea dorită pentru elementele triangulației sau se verifică un criteriu legat de eroarea aproximării (de exemplu, diferența între două aproximații consecutive să fie mai mică decât o precizie ε dată inițial).

Se poate pune problema rafinării triangulației numai în anumite regiuni ale domeniului (aproape de colțuri, de exemplu). În acest scop se împart în patru numai triunghiurile apropiate regiunii vizate, triunghiurile vecine se divid doar în două iar cele mai îndepărtate rămân întregi. Trebuie avut însă grijă pentru a obține o triangulație admisibilă și care să nu conțină triunghiuri prea plate. Va fi nevoie deci de un întreg proces de reajustare a triangulației după realizarea împărțirii triunghiurilor. Pentru aceasta se poate folosi procedeul Delaunay care, pornind de la o configurație de noduri dată, găsește acea triangulație care maximizează infimumul tuturor unghiurilor (vezi [11]).

Oricare ar fi procedeul folosit pentru triangulație, după realizarea ei, se crează un fișier care conține:

- O matrice P care păstrează coordonatele tuturor vârfurilor din triangulație și numărul corespunzător fiecărui vârf
- O matrice E care descrie fiecare latură din triangulație: numerele vârfurilor care o delimitează, ecuațiile parametrice și numărul corespunzător laturii
- O matrice T care conține datele fiecărui triunghi din triangulație și anume numerele vârfurilor sale și numărul corespunzător triunghiului.

9.3 Alegerea elementelor finite și numerotarea nodurilor

Se dispune în prezent de o mare varietate de elemente finite. Pentru obținerea unor rezultate numerice satisfăcătoare se va acorda o atenție deosebită alegerii elementelor finite iar acest lucru va depinde de particularitățile domeniului și ale ecuației care se studiază.

Calcululele necesare se vor realiza mai ușor dacă se vor efectua pornind de la un element de referință și se va ține cont de transformările care-l duc pe acesta în fiecare element al triangulației.

Fie $\hat{K} \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu elementar de referință (precum segmentul $(0,1)$, pătratul unitate, triunghiul de vârfuri $(0,0)$, $(1,0)$ și $(0,1)$, cubul

unitate etc.) și $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ un element finit Lagrange asociat. Pentru fiecare element K al triangulației vom avea o transformare T_K care duce $\hat{K}$ în K și prin care se obține elementul finit corespunzător (K, Σ_K, P_K) , după cum s-a indicat în proprietatea 5.1.2. Punctele din Σ_K se vor numi noduri.

Ținând cont de tipul de elemente finite folosite, vom nota

- n_{el} : numărul de elemente (triunghiuri) din triangulație
- n_{en} : numărul de noduri ale unui element din triangulație

În timp ce n_{el} este dat de triangulația considerată, n_{en} este determinat de tipul de element finit ales.

Nodurile situate pe frontiera domeniului pe care avem condiții Dirichlet vor avea o situație specială deoarece cunoaștem valorile soluției în aceste noduri și ele trebuie eliminate dintre necunoscutele problemei. Vom nota

- Σ : mulțimea nodurilor tuturor elementelor din triangulație
- Σ_D : mulțimea nodurilor în care sunt date condiții Dirichlet
- $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \Sigma_D$.

Avem că

$$\text{card } \Sigma = n_{no}, \quad \text{card } \Sigma_0 = n_{eq}$$

unde n_{no} este numărul de noduri din triangulație iar n_{eq} este numărul de noduri care nu aparțin frontierei Dirichlet. Remarcăm că n_{eq} este egal cu numărul de necunoscute și de ecuații din sistem.

Numerotarea nodurilor este una dintre etapele importante deoarece de ea depinde forma finală a matricii sistemului. Este de dorit o numerotare care să asigure o concentrare cât mai mare a elementelor nenule din matrice în jurul diagonalei, astfel încât să se obțină o structură bandă cu o lărgime cât mai mică. În acest mod se va putea face o economie importantă de memorie la stocarea matricii sistemului. Unul dintre algoritmele folosite în acest sens este Cuthill-McKee care constă în numerotarea nodurilor pe fronturi, începând cu un nod, continuând cu vecinii lui, apoi cu vecinii acestora s.a.m.d. (vezi [16]).

9.4 Construirea funcțiilor din bază

Vom construi acum funcțiile care vor forma baza spațiului de aproximare V_h . Nu este nevoie decât de construirea funcțiilor corespunzătoare elementului

de referință, deoarece toate funcțiile din bază se vor obține prin transformări ale acestora.

Astfel, pentru fiecare nod $A \in \widehat{\Sigma}$, definim funcția $\varphi_A \in \widehat{P}$ cu proprietatea

$$(9.1) \quad \varphi_A(B) = \delta_{AB}, \quad \forall B \in \widehat{\Sigma}.$$

Expresiile acestor funcții, al căror număr este egal cu cel al punctelor din $\widehat{\Sigma}$ (adică n_{en}), trebuie scrise explicit. Atunci când $\widehat{P}$ este o mulțime de polinoame, determinarea funcțiilor φ_A , se reduce la rezolvarea sistemului liniar (9.1) ale cărui necunoscute sunt coeficienții lor. Matricea sistemului este aceeași pentru fiecare funcție, doar termenul liber se modifică.

Funcțiile φ_A , sau mai precis coeficienții care le determină, se vor reține în vectori diferiți. De asemenea, se vor calcula și stoca gradientii acestor funcții. Vom obține astfel două matrici. Una de dimensiune $n_{en} \times n_{en}$ notată *Coef* în care am reținut coeficienții funcțiilor $(\varphi_A)_{A \in \widehat{\Sigma}}$ și alta de dimensiune $n_{en} \times (2n_{en})$ notată *Grad* în care s-au stocat gradientii acestora.

9.5 Construirea matricii de rigiditate

Cu informația pe care o avem, putem trece la scrierea matricii de rigiditate. Ideea este următoarea: se iau elementele triangulației la rând și se calculează contribuția fiecăruia în matricea de rigiditate. Prin însumarea acestor contribuții, ținând cont de pozițiile elementelor, rezultă matricea căutată. Vom descrie în continuare acest algoritm.

Vom nota prin n_{eq} numărul ecuațiilor din sistem (dimensiunea matricii de rigiditate) și vom parcurge următoarele etape:

1. Numărarea nodurilor și asocierea lor cu o ecuație:

- Construim matricea IEN de dimensiune $n_{el} \times n_{en}$ care face numerotarea nodurilor. Astfel, nodul a din elementul e are poziția $IEN(e, a)$ în șirul tuturor nodurilor. Această poziție este rezultatul numărării nodurilor, făcută anterior.
- Construim vectorul ID (vector de destinație) care are dimensiunea $n_t = n_{el}n_{en}$ și care asociază fiecărui nod numărul ecuației care-i corespunde. Nodurilor aparținând frontierei cu condiții Dirichlet (nodurile din Σ_D) li se asociază numărul 0 deoarece valorile soluției în aceste puncte sunt cunoscute și nu mai este nevoie de o ecuație pentru determinarea lor. Așadar

$$ID(A) = \begin{cases} l \text{ (numărul ecuației)} & \text{dacă } A \notin \Sigma_D \\ 0 & \text{dacă } A \in \Sigma_D. \end{cases}$$

Numărul l se obține prin simpla eliminare a nodurilor Dirichlet din Σ_D și renumerotarea, în aceeași ordine, a nodurilor din Σ_0 .

- Construim matricea LM de dimensiune $n_{el} \times n_{en}$ care dă numărul ecuației corespunzătoare nodului a din elementul e . Ea se obține astfel

$$LM(e, a) = ID(IEN(e, a)).$$

Matricea LM “localizează” pe fiecare element vectorul ID .

2. Calculul matricii fiecărui element K^e din triangulație:

- Pentru fiecare element K^e din triangulație, se determină matricea de rigiditate a elementului, pe care o notăm cu r^e și care are dimensiunea $n_{en} \times n_{en}$. Aceasta se calculează în felul următor: pentru orice alegere a două noduri a și b ale elementului K^e

$$(9.2) \quad r_{ab}^e = \int_{K^e} \nabla \varphi_a \nabla \varphi_b dx dy$$

dacă operatorul din ecuația noastră este Laplaceanul.

- Integrala (9.2) se calculează prin transformarea ei într-o integrală pe domeniul de referință, folosind coordonatele locale și jacobianul transformării de coordonate corespunzător (vezi secțiunea 8.1.1). Cum deja dispunem de gradientul funcțiilor din bază, integralele (9.2) se pot calcula chiar exact. Când operatorul este complicat (putând de exemplu, avea coeficienți variabili) sau domeniile au transformări complicate, se va folosi o metodă numerică pentru calculul acestor integrale după descrierea făcută în secțiunea 9.8.

3. Determinarea matricii de rigiditate:

- Se însumează contribuțiile fiecărei matrici r^e în matricea de rigiditate R . Pentru aceasta folosim vectorul LM . Mai precis,

Pentru fiecare element $1 \leq e \leq n_{el}$

Pentru orice pereche de două noduri din acel element, (a, b) ,

*Dacă $LM(e, a) \neq 0$ și $LM(e, b) \neq 0$ atunci
pe poziția $(LM(e, a), LM(e, b))$ din R se adună r_{ab}^e .*

9.6 Determinarea termenului liber

Trecem acum la calculul termenului liber. Din nou se va folosi ideea însumării contribuției fiecărui element al triangulației tinând cont de pozițiile lor. Vom descrie în continuare acest algoritm.

Numărul n_{eq} al ecuațiilor din sistem este în același timp și dimensiunea vectorului liber. Vom parcurge următoarele etape:

1. Calculul termenului liber al fiecărui element K^e din triangulație:

- Pentru fiecare element K^e din triangulație, se determină termenul liber al elementului, pe care îl notăm cu l^e și care are dimensiunea n_{en} . Acesta se calculează în felul următor: pentru orice nod a al elementului K^e

$$(9.3) \quad l_a^e = \int_{K^e} \varphi_a f dx dy.$$

- Ca și în cazul matricii de rigiditate, integrala (9.3) se calculează prin transformarea ei într-o integrală pe domeniul de referință, folosind coordonatele locale și jacobianul transformării de coordonate corespunzător. De cele mai multe ori se aplică o metodă aproximativă de calcul al acestor integrale (vezi secțiunile 8.1.1 și 9.8).

2. Determinarea termenului liber:

- Se însumează contribuțiile fiecărui vector l^e în termenul liber L astfel

Pentru fiecare element $1 \leq e \leq n_{el}$

Pentru orice nod a din acel element,

Dacă $LM(e, a) \neq 0$ atunci

pe poziția $LM(e, a)$ din L se adună l_a^e .

9.7 Transformările elementelor de referință

Pentru fiecare element K al triangulației, definim transformarea care duce elementul de referință $\hat{K}$ în K . Mai precis, se determină o funcție bijectivă

$$T_K : \hat{K} \rightarrow K$$

care să fie cât mai simplă posibil și să se poată determina în mod canonic, pentru toate elementele K . De obicei acest lucru se realizează impunând condiția ca vârfurile și laturile elementului de referință să fie duse în vârfurile și respectiv laturile lui K .

O posibilitate de a realiza acest lucru este următoarea: dacă pentru $1 \leq j \leq n_{en}$, $a_j = (a_j^1, a_j^2)$ sunt vârfurile lui $K \subset \mathbb{R}^2$ cu coordonatele lor, $A_j = (A_j^1, A_j^2)$ sunt vârfurile lui $\hat{K} \subset \mathbb{R}^2$ cu coordonatele lor iar φ_{A_j} sunt funcțiile bază din $\hat{K}$ construite în secțiunea 9.4, atunci definim

$$(9.4) \quad T_K(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \sum_{j=1}^{n_{en}} \varphi_{A_j}(\xi, \eta) a_j.$$

Prin (ξ, η) am notat coordonatele locale în $\hat{K}$ iar prin (x, y) coordonatele globale în K . Este ușor de văzut că transformarea T_K duce vârful A_j din $\hat{K}$ în vârful a_j din K și latura $[A_j, A_l]$ a lui $\hat{K}$ în latura $[a_j, a_l]$ a lui K .

Vom calcula acum matricea Jacobi a transformării T_K . Avem că

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^{n_{en}} \frac{\partial \varphi_{A_j}}{\partial \xi}(\xi, \eta) a_j^1, & \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^{n_{en}} \frac{\partial \varphi_{A_j}}{\partial \eta}(\xi, \eta) a_j^1 \\ \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^{n_{en}} \frac{\partial \varphi_{A_j}}{\partial \xi}(\xi, \eta) a_j^2, & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^{n_{en}} \frac{\partial \varphi_{A_j}}{\partial \eta}(\xi, \eta) a_j^2. \end{aligned}$$

Prin urmare, folosind relațiile de mai sus și cunoscând matricea $Grad$ a gradientilor funcțiilor φ_{A_j} și coordonatele vârfurilor lui K putem construi matricea Jacobi a transformării T_K

$$J_K(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

și $j_K = \det(J_K)$, Jacobianul transformării T_K .

Să mai observăm că

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_a}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \varphi_A}{\partial x}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \\ &= \frac{\partial \varphi_{A_j}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{A_l}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \varphi_A}{\partial y}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \varphi_{A_j}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_A}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y}.$$

În general nu dispunem de expresia transformării $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ dar avem că

$$J_K^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Prin urmare

$$(9.5) \quad \nabla_{xy} \varphi_a(x, y) = \nabla_{\xi\eta} \varphi_A(\xi, \eta) J_K^{-1}.$$

9.8 Calculul integralelor

După cum am mai spus, integrala (9.2) se calculează prin transformarea ei într-o integrală pe domeniul de referință, folosind coordonatele locale și jacobianul transformării de coordonate corespunzător. Astfel, avem că

$$\begin{aligned} r_{ab}^e &= \int_{K^e} \nabla \varphi_a(x, y) \nabla \varphi_b(x, y) dx dy = \\ &= \int_{\hat{K}} \nabla \varphi_A(\xi, \eta) J_{K^e}^{-1}(\xi, \eta) \nabla \varphi_B(\xi, \eta) J_{K^e}^{-1}(\xi, \eta) j_{K^e}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Prin urmare, pentru orice element K^e din triangulație și orice două noduri ale sale a, b , avem

$$(9.6) \quad r_{ab}^e = \int_{\hat{K}} \nabla \varphi_A(\xi, \eta) J_{K^e}^{-1}(\xi, \eta) \nabla \varphi_B(\xi, \eta) J_{K^e}^{-1}(\xi, \eta) j_{K^e}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Pentru integrala (9.3) se folosește același procedeu

$$l_a^e = \int_{K^e} \varphi_a(x, y) f(x, y) dx dy = \int_{\hat{K}} \varphi_A(\xi, \eta) f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) j_{K^e}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Prin urmare, pentru orice element K^e din triangulație și orice nod al său a , avem

$$(9.7) \quad l_a^e = \int_{\hat{K}} \varphi_A(\xi, \eta) f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) j_{K^e}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Calculul integralelor pe domeniul $\hat{K}$ se poate face exact atunci când acest lucru este ușor realizabil (mai ales în unele cazuri pentru r_{ab}^e). În general se folosește o formulă de integrare numerică de tip Newton-Cotes sau Gauss.

Ordinul	Punctele de evaluare	Ponderile
1	$(0, 0), (1, 0), (0, 1)$	$\frac{ T }{3}, \frac{ T }{3}, \frac{ T }{3}$
1	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$ T $
2	$(\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})$	$\frac{ T }{3}, \frac{ T }{3}, \frac{ T }{3}$
2	$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{ T }{12}, \frac{ T }{12}, \frac{ T }{12}, \frac{ 9T }{12}$

Tabelul 9.1: Ordinul, punctele de evaluare și ponderile unor metode de integrare numerică Newton-Cotes pe domeniul $T = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < x + y < 1\}$.

Ordinul	Punctele de evaluare	Ponderile
1	$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$	$\frac{ Q }{4}, \frac{ Q }{4}, \frac{ Q }{4}, \frac{ Q }{4}$
1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$ Q $
2	$(\frac{1}{2}, 0), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1), (0, \frac{1}{2})$	$\frac{ Q }{4}, \frac{ Q }{4}, \frac{ Q }{4}, \frac{ Q }{4}$
2	$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{ Q }{12}, \frac{ Q }{12}, \frac{ Q }{12}, \frac{ Q }{12}, \frac{8 Q }{12}$

Tabelul 9.2: Ordinul, punctele de evaluare și ponderile unor metode de integrare numerică Newton-Cotes pe domeniul $Q = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Formulele Newton-Cotes vor avea forma

$$(9.8) \quad \int_{\hat{K}} g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{nint} g(\xi_i, \eta_i) w_i$$

unde $nint$ este numărul de puncte considerate în integrare, (ξ_i, η_i) sunt punctele de evaluare iar w_i ponderile. În tabelele 9.1 și 9.2 sunt oferite datele câtorva metode de integrare de tip Newton-Cotes pe domeniile $T = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < x + y < 1\}$ și respectiv $Q = (0, 1) \times (0, 1)$.

Metodele de tip Gauss au o precizie mai mare și pot conduce la calcularea exactă a matricii sistemului. Formulele Gauss vor fi tot de forma (9.8) unde punctele de evaluare (ξ_i, η_i) sunt date de zerourile polinoamelor ortogonale Legendre. În tabelul 9.3 sunt oferite punctele de evaluare și ponderile unei metode Gauss cu 7 puncte pe domeniul $T = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < x + y < 1\}$. Ea este exactă pentru polinoame de grad mai mic sau egal cu 5.

Pe domeniul $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ formulele (9.8) vor avea forma mai simplă

$$(9.9) \quad \int_{\hat{K}} g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{mint} \sum_{j=1}^{mint} g(\xi_i, \xi_j) w_i w_j$$

unde $mint^2$ este numărul de puncte de evaluare folosite și $w_i w_j$ ponderile corespunzătoare. În tabelele 9.4 și 9.5 sunt oferite datele unor metode Gauss

i	ξ_i	η_i	Ponderi w_i
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{80}$
2	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$
3	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$
4	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$
5	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$
6	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$
7	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$

Tabelul 9.3: Punctele de evaluare $(\xi_i, \eta_i)_{1 \leq i \leq 7}$ și ponderile $(w_i)_{1 \leq i \leq 7}$ ale metodei de integrare numerică Gauss cu 7 noduri în domeniul $T = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y - x < 1\}$.

i	ξ_i	Ponderi w_i
1	0.1127016654	$\frac{5}{18}$
2	0.5	$\frac{8}{18}$
3	0.8872983346	$\frac{5}{18}$

Tabelul 9.4: Punctele de evaluare $(\xi_i, \eta_i)_{1 \leq i \leq 3}$ și ponderile $(w_i)_{1 \leq i \leq 3}$ ale metodei de integrare numerică Gauss cu 9 noduri în domeniul $Q = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

cu 9 și respectiv 16 puncte pe domeniul $Q = (0, 1) \times (0, 1)$. Ele sunt exacte pentru polinoame de grad mai mic sau egal cu 5 și respectiv 7.

9.9 Exemplu

În această secțiune vom considera drept exemplu ecuația Poisson

$$(9.10) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

unde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ iar f este o funcție din $L^2(\Omega)$.

Vom aplica cele descrise anterior pentru determinarea sistemului de ecuații algebrice liniare cu ajutorul căruia vom aproxima soluția ecuației (9.10).

Vom alege mai întâi elementele finite cu care lucrăm. Pentru aceasta vom considera elementul de referință dat de

- $\hat{K}$, pătratul unitate din $\mathbb{R}^2$,

i	ξ_i	Ponderi w_i
1	0.0694318442	0.1739274226
2	0.3300094782	0.3260725774
3	0.6699905218	0.3260725774
4	0.9305681558	0.1739274226

Tabelul 9.5: Punctele de evaluare $(\xi_i, \eta_i)_{1 \leq i \leq 4}$ și ponderile $(w_i)_{1 \leq i \leq 4}$ ale metodei de integrare numerică Gauss cu 16 noduri în domeniul $Q = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

$$\widehat{K} = [0, 1] \times [0, 1],$$

- $\widehat{\Sigma}$ mulțimea formată din cele patru vârfuri, cele patru mijloace de laturi și punctul din centru pătratului:

$$\widehat{\Sigma} = \{(0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}), (0, 1), (\frac{1}{2}, 1), (1, 1)\},$$

- $\widehat{P}$ spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult doi în fiecare dintre variabilele x și y ,

$$\widehat{P} = \{a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^2\eta^2 : a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Vom trece acum la numerotarea nodurilor. Să observăm că toate nodurile considerate au coordonate $(x_i + q_1\frac{h}{2}, y_j + q_2\frac{h}{2})$ cu $0 \leq i, j \leq N + 1$ și $q_1, q_2 \in \{0, 1\}$. Pe fiecare segment $y = y_j + q_2\frac{h}{2}$, care nu este conținut de frontieră, se vor afla $2N + 3$ noduri, dintre care 2 aparțin frontierei. În total vom avea $(2N + 3)^2$ noduri, dintre care $(2N + 1)^2$ sunt noduri interioare. Toate nodurile (inclusiv cele de pe frontieră) vor fi numerotate astfel

$$\left(x_i + q_1\frac{h}{2}, y_j + q_2\frac{h}{2}\right) = a_{(2j+q_2)(2N+3)+2i+q_1+1}$$

unde $0 \leq i, j \leq N + 1$ și

$$\begin{cases} q_1, q_2 \in \{0, 1\} & \text{dacă } i \neq N + 1, j \neq N + 1 \\ q_1 = 0 & \text{dacă } i = N + 1 \\ q_2 = 0 & \text{dacă } j = N + 1 \end{cases}$$

Vom defini funcția

$$f(i, j, q_1, q_2) = (2j + q_2)(2N + 3) + 2i + q_1 + 1$$

care dă indicele nodului $(x_i + q_1\frac{h}{2}, y_j + q_2\frac{h}{2})$.

Se obține astfel o mulțime de noduri $(a_k)_{1 \leq k \leq (2N+3)^2}$ și avem că

$$\begin{aligned} n_{el} &= (N+1)^2 \\ n_{en} &= 9 \\ n_{no} &= (2N+3)^2 \end{aligned}$$

Matricea IEN se definește astfel: $IEN(a, s) = f(i, j, q_1, q_2)$ unde

$$\begin{aligned} j &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{a-1}{N+1} \right\rfloor & \text{dacă } 1 \leq s \leq 6 \\ 1 + \left\lfloor \frac{a-1}{N+1} \right\rfloor & \text{dacă } 7 \leq s \leq 9, \end{cases} \\ i &= \begin{cases} a - 1 - (N+1) \left\lfloor \frac{a-1}{N+1} \right\rfloor & \text{dacă } s \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \\ a - (N+1) \left\lfloor \frac{a-1}{N+1} \right\rfloor & \text{dacă } s \in \{3, 6, 9\}, \end{cases} \\ q_1 &= \begin{cases} 0 & \text{dacă } s \in \{1, 3, 4, 6, 7, 9\} \\ 1 & \text{dacă } s \in \{2, 5, 8\}, \end{cases} \\ q_2 &= \begin{cases} 0 & \text{dacă } s \in \{1, 2, 3, 7, 8, 9\} \\ 1 & \text{dacă } s \in \{4, 5, 6\}, \end{cases} \end{aligned}$$

Vectorul ID se construiește astfel:

$$ID(n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \leq 2N+4 \text{ sau} \\ & (2N+3)(2N+2)+2 \leq n \text{ sau} \\ & (2N+3)|n \text{ sau } (2N+3)|(n-1) \\ n - (2N+2) - 2 \left\lfloor \frac{n}{2N+3} \right\rfloor & \text{în rest.} \end{cases}$$

Putem acum să definim și matricea LM prin $LM(a, s) = ID(IEN(a, s))$.

Dacă notăm $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (\frac{1}{2}, 0)$, $A_3 = (1, 0)$, $A_4 = (0, \frac{1}{2})$, $A_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $A_6 = (1, \frac{1}{2})$, $A_7 = (0, 1)$, $A_8 = (\frac{1}{2}, 1)$ și $A_9 = (1, 1)$ determinăm funcția φ_{A_1} din condițiile $\varphi_{A_1}(A_j) = \delta_{1j}$, $1 \leq j \leq 9$. Aceasta se reduce la a rezolva sistemul

$$(9.11) \quad \begin{cases} a_1 & & & & & & & & & = 1 \\ a_1 & +\frac{1}{2}a_2 & & & +\frac{1}{4}a_5 & & & & & = 0 \\ a_1 & +a_2 & & & +a_5 & & & & & = 0 \\ a_1 & & +\frac{1}{2}a_3 & & & +\frac{1}{4}a_6 & & & & = 0 \\ a_1 & +\frac{1}{2}a_2 & +\frac{1}{2}a_3 & +\frac{1}{4}a_4 & +\frac{1}{4}a_5 & +\frac{1}{4}a_6 & +\frac{1}{8}a_7 & +\frac{1}{8}a_8 & +\frac{1}{16}a_9 & = 0 \\ a_1 & +\frac{1}{2}a_2 & +a_3 & +\frac{1}{2}a_4 & +\frac{1}{4}a_5 & +a_6 & +\frac{1}{4}a_7 & +\frac{1}{2}a_8 & +\frac{1}{4}a_9 & = 0 \\ a_1 & & +a_3 & & & +a_6 & & & & = 0 \\ a_1 & +a_2 & +a_3 & +a_4 & +a_5 & +a_6 & +a_7 & +a_8 & +a_9 & = 0 \\ a_1 & +a_2 & +\frac{1}{2}a_3 & +\frac{1}{2}a_4 & +a_5 & +\frac{1}{4}a_6 & +\frac{1}{2}a_7 & +\frac{1}{4}a_8 & +\frac{1}{4}a_9 & = 0. \end{cases}$$

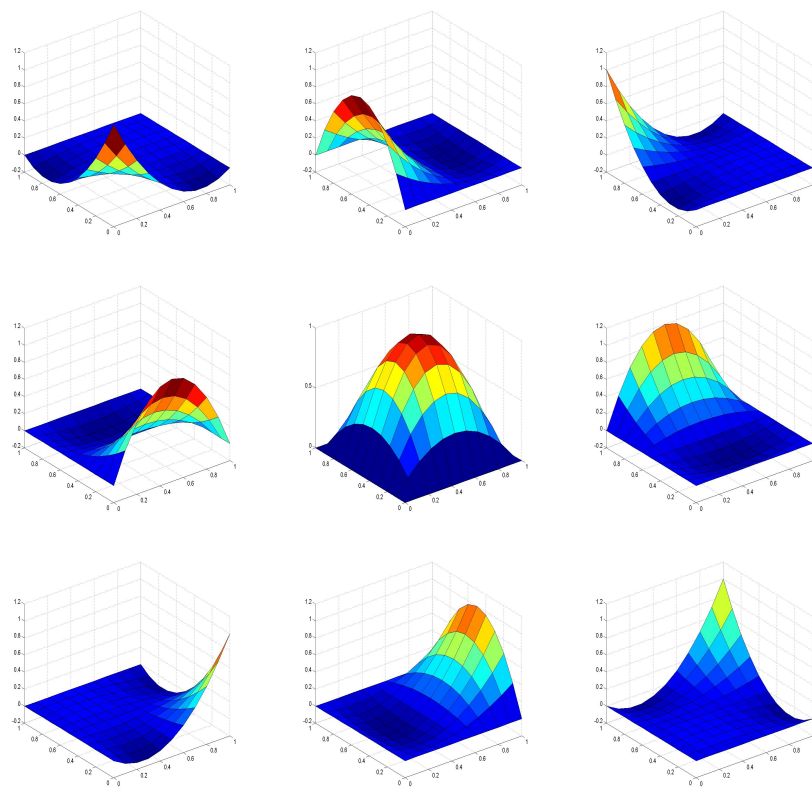


Figura 9.1: Funcțiile din bază φ_{A_i} .

Rezolvând acest sistem vom obține că

$$\varphi_{A_1}(x, y) = 1 - 3\xi - 3\eta + 9\xi\eta + 2\xi^2 + 2\eta^2 - 6\xi^2\eta - 6\xi\eta^2 + 4\xi^2\eta^2.$$

În mod analog se vor determina toate funcțiile φ_{A_j} , $1 \leq j \leq 9$. Le vom stoca în nouă vectori din $\mathbb{R}^9$ ce conțin coeficienții corespunzători. Rezultatele le asamblăm în următoarea matrice *Coef*: prima coloană conține coeficienții lui φ_{A_1} , a doua coloană cei ai lui φ_{A_2} , s.a.m.d.

$$Coef = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -12 & 3 & -12 & 16 & -4 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & -6 & 8 & -16 & 8 & -2 & 4 & -2 \\ -6 & 8 & -2 & 12 & -16 & 4 & -6 & 8 & -2 \\ 4 & -8 & 4 & -8 & 16 & -8 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

În figura 9.1 sunt prezentate graficele celor nouă funcții φ_{A_j} .

Să remarcăm că matricea sistemului (9.11) este aceeași pentru fiecare funcție φ_{A_j} , schimbându-se doar termenul liber.

De asemenea, vom reține tot într-o matrice de dimensiune 18×9 gradientii celor nouă funcții φ_{A_j} . Ei se pot obține ușor direct din matricea *Coef*. În matricea *Grad* de mai jos prima coloană conține coeficienții gradientului lui φ_{A_1} , a doua coloană cei ai gradientului lui φ_{A_2} , s.a.m.d. În fiecare coloană pe primele 9 poziții sunt coeficienții derivatei în raport cu x iar pe următoarele 9 poziții cei ai derivatei în raport cu y .

$$Grad = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -12 & 3 & -12 & 16 & -4 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 24 & -12 & 16 & -32 & 16 & -4 & 8 & -4 \\ -6 & 8 & -2 & 12 & -16 & 4 & -6 & 8 & -2 \\ 8 & -16 & 8 & -16 & 32 & -16 & 8 & -16 & 8 \end{array} \right) \cdot$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -12 & 3 & -12 & 16 & -4 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & -6 & 8 & -16 & 8 & -2 & 4 & -2 \\ -12 & 16 & -4 & 24 & -32 & 8 & -12 & 16 & -4 \\ 8 & -16 & 8 & -16 & 32 & -16 & 8 & -16 & 8 \end{array} \right).$$

În acest caz transformările T_K au forme foarte simple. Astfel, dacă $K = K_{rs}$ este pătratul $[x_r, x_{r+1}] \times [y_s, y_{s+1}]$ atunci transformarea $T_{K_{rs}}$ nu este altceva decât o translație urmată de o omotetie:

$$(9.12) \quad T_{K_{rs}}(\xi, \eta) = h(r, s) + h(\xi, \eta).$$

Notând (ξ, η) variabila locală din domeniul $\hat{K}$ de referință iar (x, y) variabila globală din domeniul Ω , obținem că

$$\begin{cases} x = hr + h\xi \\ y = hs + h\eta. \end{cases}$$

De asemenea, obținem imediat și transformarea inversă

$$\begin{cases} \xi = -r + \frac{x}{h} \\ \eta = -s + \frac{y}{h}. \end{cases}$$

Matricea Jacobi a transformării $T_{K_{rs}}$ va fi

$$J_{K_{rs}} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

iar jacobianul $j_{K_{rs}} = \det(J_{K_{rs}}) = h^2$.

Vom construi acum matricea de rigiditate și termenul liber în exemplul considerat.

Să observăm mai întâi că, pentru orice element K^e din triangulație și orice două noduri ale sale a, b , avem conform lui (9.6) că

$$\begin{aligned} r_{ab}^e &= \int_{\hat{K}} \nabla \varphi_A(\xi, \eta) J_{K^e}^{-1}(\xi, \eta) \nabla \varphi_B(\xi, \eta) J_{K^e}^{-1}(\xi, \eta) j_{K^e}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_{\hat{K}} \nabla \varphi_A(\xi, \eta) \nabla \varphi_B(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Pentru integrare pe $\hat{K}$ vom folosi formula Gauss dată de 9.5 (care este exactă în acest caz)

$$r_{ab}^e = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \nabla \varphi_A \nabla \varphi_B(\xi_i, \xi_j) w_i w_j.$$

Matricea r^e , calculată cu această metodă, este

$$r^e = \begin{pmatrix} \frac{28}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{45} \\ -\frac{1}{5} & \frac{88}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{5} & \frac{28}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} & \frac{88}{45} & -\frac{16}{45} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} \\ -\frac{16}{45} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{45} & \frac{256}{45} & -\frac{16}{15} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{15} & -\frac{16}{45} \\ -\frac{1}{45} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{45} & -\frac{1}{15} & \frac{16}{45} & \frac{88}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{45} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{45} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{16}{15} & \frac{88}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} & \frac{28}{45} & -\frac{1}{45} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{45} & -\frac{16}{15} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} & \frac{88}{45} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{5} & \frac{28}{45} \end{pmatrix}$$

Pe de altă parte, pentru orice element K^e din triangulație și orice nod al său a avem conform lui (9.7) că

$$\begin{aligned} l_a^e &= \int_{\hat{K}} \varphi_A(\xi, \eta) f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) j_{K^e}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= h^2 \int_{\hat{K}} \varphi_A(\xi, \eta) f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Pentru integrare pe $\hat{K}$ vom folosi formula Gauss

$$l_a^e = h^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \varphi_A(\xi_i, \xi_j) f(x(\xi_i, \xi_j), y(\xi_i, \xi_j)) w_i w_j$$

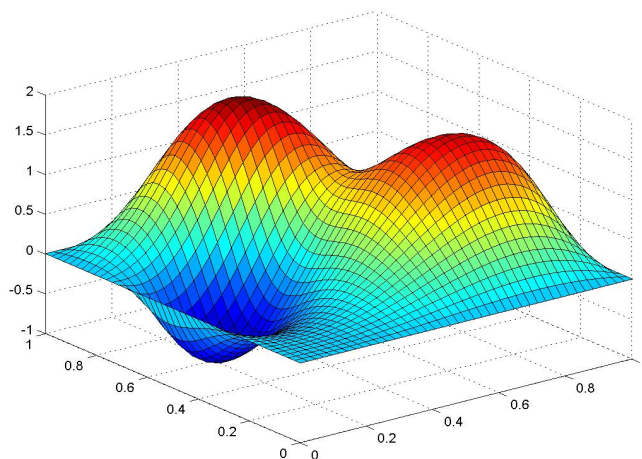


Figura 9.2: Soluția ecuației (9.10) cu $f(x, y) = e^{5 \sin(5xy)} - e^{5 \sin(5wy)}$.

unde ξ_i și w_i sunt date de tabelul 9.5.

Folosind algoritmul prezentat, construim cu ajutorul lui r^e și l^e matricea de rigiditate R și vectorul liber L .

În figura 9.2 este prezentat graficul aproximației soluției problemei (9.10) cu

$$f(x, y) = e^{5 \sin(5xy)} - e^{5 \sin(5wy)},$$

obținută prin rezolvarea sistemului dedus mai sus.

Bibliografie

- [1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Vol. 65 Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J.H. Argyris, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth, 1960 (reprinted from Aircraft Eng., 1954-5).
- [3] S.C. Brenner și R.L. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1994.
- [4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [5] F. Brezzi și M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Vol. 15 Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, Vol 4 Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, Amsterdam 1978.
- [7] R.W. Clough, *The finite element in plane stress analysis*, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburgh, 1960.
- [8] R. Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration*, Bull. Am. Math. Soc., 49, 1-23, 1943.
- [9] R. Courant, K. Friedrichs, și H. Lewy, *On the partial difference equations of mathematical physics*, IBMJ. Res. Develop. 11, 215-234, 1967. English translation of an article originally published in German in Math. Ann. 100 (1928), 32-74.
- [10] B.G. Galerkin, *Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates* (Russian), Vestn. Inzh. Tech., 19, 897-908, 1915.

-
- [11] P.L. George, *Automatic Mesh Generation. Application to Finite Element Methods*, Wiley, New York, 1991.
- [12] V. Girault și P.-A. Raviart, *Finite element methods for NavieroStokes equations. Theory and algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [13] T.J.R. Hughes, *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, Dover Publications, New York, 2000. Corrected reprint of the 1987 original [Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ].
- [14] E. Isaacson și H.B. Keller, *Analysis of numerical methods*, Dover Publications, New York, 1994. Corrected reprint of the 1966 original [John Wiley & Sons, New York].
- [15] P. Joly, *Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis*, Ellipses, Paris, 1990.
- [16] B. Lucquin și O. Pironneau, *Introduction au calcul scientifique*, Masson, Paris, 1996.
- [17] N.M. Newmark, *Numerical methods of analysis in bars, plates and elastic bodies*, in Numerical Methods in Analysis in Engineering (ed. L.E. Grinter), Macmillan, 1949.
- [18] O. Pironneau, *Finite element methods for fluids*, John Wiley & Sons, Chichester, 1989.
- [19] W. Prager și J.L. Synge, *Approximation in elasticity based on the concept of function space*, Q. J. Appl. Math., 5, 241-69, 1947.
- [20] R.B. Raviart și J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [21] Lord Rayleigh (J.W. Strutt), *On the theory of resonance*, Trans. Roy. Soc. (London), A161, 77-118, 1870.
- [22] W. Ritz, *Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations - Probleme der math-ematischen Physik*, J. Reine Angew. Math., 135, 1-61, 1909.
- [23] H.R. Schwarz, *Finite element methods*, Academic Press, London, 1988.
- [24] G. Strang și G.J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice Hall Series in Automatic Computation, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

BIBLIOGRAFIE

- [25] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001, Corrected reprint of the 1984 edition [North- Holland, Amsterdam, 1984].
- [26] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin și L.J. Topp, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aero. Sci., 23, 805-23, 1956.
- [27] R. Wheeden și A. Zygmund, *Measure and integral*, Marcel Dekker, New York, 1977.
- [28] M. Zamansky, *Introduction à l'algebre el l'analyse modernes*, Dunod, Paris, 1967.
- [29] O.C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*, McGraw Hill, London, 1977.
- [30] O.C. Zienkiewicz și R.L. Taylor, *The finite element method. Vol. 1 The basis*, Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.
- [31] O.C. Zienkiewicz și R.L. Taylor, *The finite element method. Vol. 3 Fluid dynamics*, Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.